

テキスト第6章 §6.3 (p.120～)

◆PERT

1つの仕事を遂行する際の作業時間 y_{ij} に着目し、作業が与えられた時間内に終わる確率や仕事が完了する平均時間などを解析する手法を **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) という。

y_{ij} は一定というよりは変動する場合が多い ⇒ 確率変数

作業時間が変動 ⇒ 仕事の完了時間も変動する

◆実行可能性

仕事が完了予定時刻までに終わる確率のことを実行可能性という。

- 各作業時間 $\{y_{ij}\}$ が独立で、同分布に従う確率変数である場合
クリティカル・パス上の作業時間 $\{y_{ij}\}$ の和は仕事の最早時間 T に等しいから

$$T = \sum_{i,j} y_{ij}$$

$\{y_{ij}\}$ は独立、かつ同分布に従う ⇒ **中心極限定理**の適用

仕事の最早時刻を T 、仕事の完了予定時刻を t_0 とする。

クリティカル・パス上の作業数 m が十分大きいとき

⇒ T は平均 T_E 、分散 σ_E^2 の正規分布に従う

$$P(T \leq t_0) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\frac{(x-T_E)^2}{2\sigma_E^2}} dx$$

ここで T_E は仕事の最早時刻 T の平均値 (期待値)、 σ_E^2 は T の分散の期待値である。

※作業数を m 、作業時間 y_{ij} の平均と分散をそれぞれ α 、 σ^2 とする ⇒ $T_E = m\alpha$ 、 $\sigma_E^2 = m\sigma^2$

正規分布表を用いるために標準化をおこなうと、クリティカル・パス上の作業数 m が十分大きいとき

⇒ $Z = \frac{T - m\alpha}{\sqrt{m\sigma^2}} = \frac{\frac{T}{\sqrt{m}} - \alpha\sqrt{m}}{\sigma}$ は標準正規分布 (平均 0、分散 1) に従う

よって

$$P(T \leq t_0) = P(Z \leq z_0) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{ただし } z_0 = \frac{t_0 - m\alpha}{\sqrt{m\sigma^2}} = \frac{\frac{t_0}{\sqrt{m}} - \alpha\sqrt{m}}{\sigma})$$

となり、標準正規分布表から仕事が予定時間内に終わる確率が求められる。

このとき、 $p = P(T \leq t_0)$ を t_0 に関する実行可能度という。

【例題】

問5. あるネットワークにおいて、20個の作業からなるクリティカル・パスがあり、各作業は独立同分布に従うものとして、作業時間の平均が5(分)で、分散が3.5であるという。 $t_0 = 100$ (分)に関する実行可能度を求めよ。

【解答】

問題より $m = 20$ 、 $\alpha = 5$ 、 $\sigma^2 = 3.5$ である。

各作業は独立同分布に従うから、仕事の最早時刻 T の平均値(期待値)は正規分布 $N(m\alpha, m\sigma^2)$ に従う。標準化をおこなうと、以下が成立する。

$$P(T \leq 100) = P(Z \leq z_0) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ここで $z_0 = \frac{t_0 - m\alpha}{\sqrt{m\sigma^2}} = \frac{\frac{t_0}{\sqrt{m}} - \alpha\sqrt{m}}{\sigma}$ であるから、 $z_0 = \frac{100 - 20 \times 5}{\sqrt{20 \times 3.5}}$ もしくは $z_0 = \frac{\frac{100}{\sqrt{20}} - 5\sqrt{20}}{\sqrt{3.5}}$ で計算できる。

よって $z_0 = 0$ であるから、標準正規分布表より $P(T \leq 100) = P(Z \leq z_0) = 0.5 + 0 = 0.5$ となる。

以上より、 $t_0 = 100$ (分)に関する実行可能度は0.5(50%)

【演習問題】

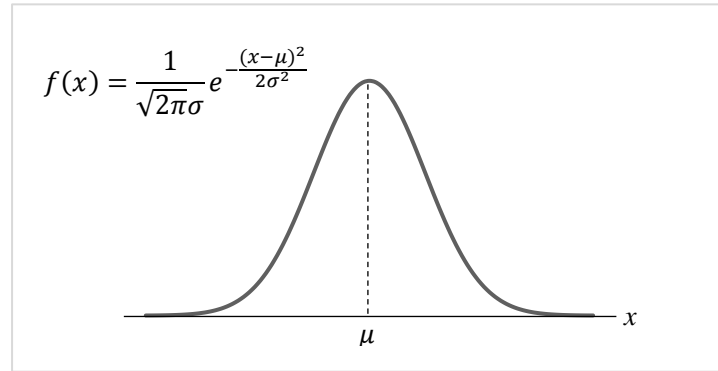
あるネットワークにおいて、36個の作業からなるクリティカル・パスがあり、各作業は独立同分布に従うものとして、作業時間の平均が3(分)で、分散が4であるという。

(1) $t_0 = 123$ (分)に関する実行可能度を求めよ。

(2) $t_0 = 99$ (分)に関する実行可能度を求めよ。

※正規分布は左右対称なので、 $z_0 < 0$ のときは $0.5 - P(0 \leq z \leq |z_0|)$ とすればよい。

補足1. 正規分布



- 正規分布は、自然界などの様々な現象に対してよく当てはまる確率分布
- 平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ と書く
- 平均値 (μ) = 最頻値 = 中央値で、平均値を中心に左右対称
- x 軸は漸近線
- 分散 σ^2 (標準偏差 σ) が大きくなると山は広がって平らに、小さくなると山が高く上がった形になる
- 確率 $P(a \leq x \leq b)$ は $f(x)$ を a から b まで積分したもの (=面積)
- $-\infty$ から ∞ まで積分すると 1 となる (山の部分の面積が全体で 1 = 100%)

補足2. 中心極限定理

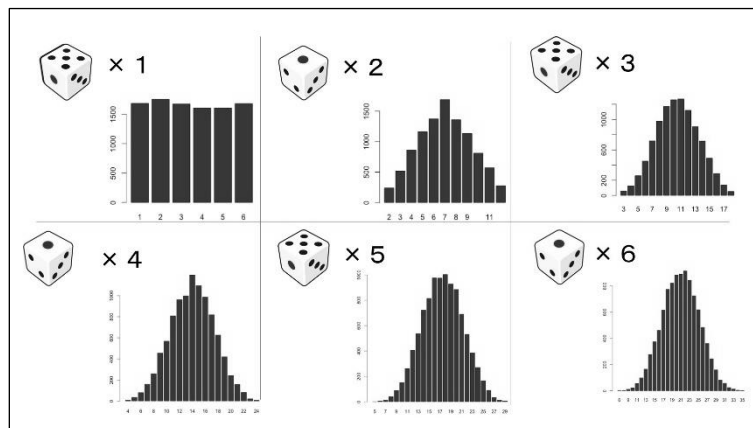
- 平均 μ 、分散 σ^2 をもつ独立同分布から抽出した標本 X_1, X_1, \dots, X_n について、 n が十分大きければ X_n の和と平均は正規分布に (近似的に) 従う

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

例) サイコロを 1 回振った時にそれぞれの目が出る確率は $1/6$ (一様分布)

⇒サイコロを振る回数を増やしていくと、出目の合計 (平均) の分布は正規分布に近づく



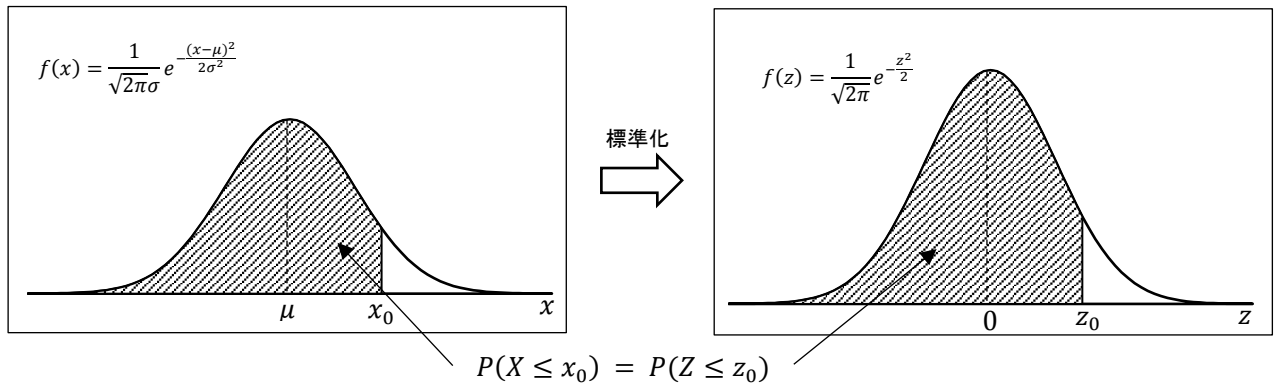
※tokei.net より引用

補足3. 標準化

- 平均 0、分散 1 の正規分布を特に「標準正規分布」という
- 平均 μ 、分散 σ^2 を持つ正規分布を標準正規分布となるようにデータ変換をおこなうことを標準化という
- 標準化を行うには以下の式を用いる

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- 標準化をおこなった際、 $(X \leq x_0)$ となる確率は $(Z \leq z_0)$ の確率に対応する (等しい)



標準正規分布表

※この正規分布表は $P(0 \leq z \leq z_0)$ を示しているのので、 $P(z \leq z_0)$ を求める際は 0.5 ($P(z \leq 0)$) を加えること。

※正規分布は左右対称なので、 $z_0 < 0$ のときは $0.5 - P(0 \leq z \leq |z_0|)$ とすればよい。

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000000	0.003989	0.007978	0.011966	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106420	0.110261	0.114092
0.3	0.117911	0.121720	0.125516	0.129300	0.133072	0.136831	0.140576	0.144309	0.148027	0.151732
0.4	0.155422	0.159097	0.162757	0.166402	0.170031	0.173645	0.177242	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198468	0.201944	0.205401	0.208840	0.212260	0.215661	0.219043	0.222405
0.6	0.225747	0.229069	0.232371	0.235653	0.238914	0.242154	0.245373	0.248571	0.251748	0.254903
0.7	0.258036	0.261148	0.264238	0.267305	0.270350	0.273373	0.276373	0.279350	0.282305	0.285236
0.8	0.288145	0.291030	0.293892	0.296731	0.299546	0.302337	0.305105	0.307850	0.310570	0.313267
0.9	0.315940	0.318589	0.321214	0.323814	0.326391	0.328944	0.331472	0.333977	0.336457	0.338913
1.0	0.341345	0.343752	0.346136	0.348495	0.350830	0.353141	0.355428	0.357690	0.359929	0.362143
1.1	0.364334	0.366500	0.368643	0.370762	0.372857	0.374928	0.376976	0.379000	0.381000	0.382977
1.2	0.384930	0.386861	0.388768	0.390651	0.392512	0.394350	0.396165	0.397958	0.399727	0.401475
1.3	0.403200	0.404902	0.406582	0.408241	0.409877	0.411492	0.413085	0.414657	0.416207	0.417736
1.4	0.419243	0.420730	0.422196	0.423641	0.425066	0.426471	0.427855	0.429219	0.430563	0.431888
1.5	0.433193	0.434478	0.435745	0.436992	0.438220	0.439429	0.440620	0.441792	0.442947	0.444083
1.6	0.445201	0.446301	0.447384	0.448449	0.449497	0.450529	0.451543	0.452540	0.453521	0.454486
1.7	0.455435	0.456367	0.457284	0.458185	0.459070	0.459941	0.460796	0.461636	0.462462	0.463273
1.8	0.464070	0.464852	0.465620	0.466375	0.467116	0.467843	0.468557	0.469258	0.469946	0.470621
1.9	0.471283	0.471933	0.472571	0.473197	0.473810	0.474412	0.475002	0.475581	0.476148	0.476705
2.0	0.477250	0.477784	0.478308	0.478822	0.479325	0.479818	0.480301	0.480774	0.481237	0.481691
2.1	0.482136	0.482571	0.482997	0.483414	0.483823	0.484222	0.484614	0.484997	0.485371	0.485738
2.2	0.486097	0.486447	0.486791	0.487126	0.487455	0.487776	0.488089	0.488396	0.488696	0.488989
2.3	0.489276	0.489556	0.489830	0.490097	0.490358	0.490613	0.490863	0.491106	0.491344	0.491576
2.4	0.491802	0.492024	0.492240	0.492451	0.492656	0.492857	0.493053	0.493244	0.493431	0.493613
2.5	0.493790	0.493963	0.494132	0.494297	0.494457	0.494614	0.494766	0.494915	0.495060	0.495201
2.6	0.495339	0.495473	0.495604	0.495731	0.495855	0.495975	0.496093	0.496207	0.496319	0.496427
2.7	0.496533	0.496636	0.496736	0.496833	0.496928	0.497020	0.497110	0.497197	0.497282	0.497365
2.8	0.497445	0.497523	0.497599	0.497673	0.497744	0.497814	0.497882	0.497948	0.498012	0.498074
2.9	0.498134	0.498193	0.498250	0.498305	0.498359	0.498411	0.498462	0.498511	0.498559	0.498605
3	0.498650	0.498694	0.498736	0.498777	0.498817	0.498856	0.498893	0.498930	0.498965	0.498999