テキスト第７章 §7.2 （p.126～）

待ち行列理論（復習）

◆待ち行列

スーパーのレジや切符の自動販売機のように、客がサービスを受けるために順番に並んで待っている行列。なお、サービスを受ける場所のことを「窓口」という。

◆平均到着率と平均サービス率

待ち行列の状態を考えるために必要な指標として、平均到着率と平均サービス率がある。

◎**平均到着率** λ ・・・単位時間に到着する客数の平均値

⇒**平均到着間隔**（客がやってくる時間間隔の平均）　$\frac{1}{\lambda}$

◎**平均サービス率** μ ・・・単位時間にサービスを終えられる客数の平均値

⇒**平均サービス時間**（客１名に対してかかるサービス時間の平均）　$\frac{1}{\mu}$

◆待ち行列の表記法（ケンドールの記号）

以下のように記号を用いて表記する。

$\boxed{\text{イ}}$ ／ $\boxed{\text{ロ}}$ ／ $\boxed{\text{ハ}}$ （ $\boxed{\text{ニ}}$ ）

系の容量（数字、∞のときは省略可）

窓口の数（数字）

サービス時間の確率法則（M, D, G, E_k など）

客の到着の確率法則（M, D, G, E_k など）

$\boxed{\text{イ}}$ 、$\boxed{\text{ロ}}$ の記号が指すものは以下の通りである。

	客の到着の確率法則	サービス時間の確率法則
M	ポアソン到着	指数サービス
D	レギュラー到着	レギュラー・サービス
G	一般の到着	一般のサービス
E_k	次数 k のアーラン到着	次数 k のアーラン・サービス

◆到着の法則

待ち行列の解析　⇒　客の到着の確率法則を知る必要

◎レギュラー到着（記号 D）

一定期間ごとに客が到着　＝　客の到着間隔 $\frac{1}{\lambda}$ は常に一定

◎一般の到着（記号 G）

到着間隔の分布として、一定の確率分布を仮定しない

※多くの場合、到着間隔が独立（ある時間の到着間隔は他の時間の到着と無関係）と仮定し、このときは GI と書く

◎次数 k のアーラン到着（記号 E_k）

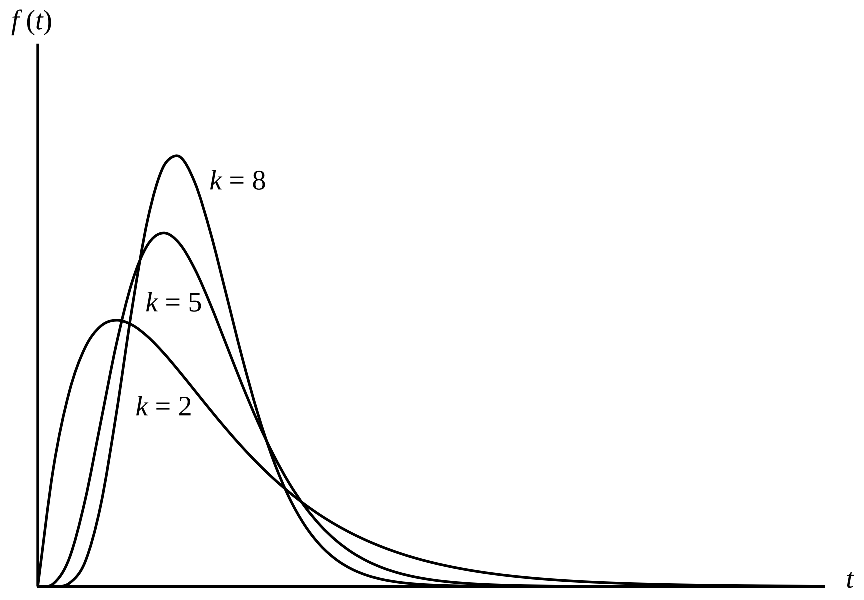
到着間隔の分布が次数 k のアーラン分布に従う

次数 k のアーラン分布・・・$k=1$ のときは指数分布、$k \to \infty$ とすれば $\frac{1}{\lambda}$ で確率 1 をとる単位分布

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda kt} & (t \geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

※ポアソン到着とレギュラー到着の中間的な到着

（$k=1$ のときはポアソン到着、$k \to \infty$ のときはレギュラー到着）



アーラン分布

◎ポアソン到着（記号 *M*）

全くでたらめに客が到着する場合で、ランダム到着または指数到着ともいう

以下の 3 つの条件から導かれる

（1）________性・・・時間間隔 $(a, a+t)$ の間に客が k 人到着する確率 $v_k(t)$ は、すべての $a>0$ に対して同一（$v_k(t)$ は k と t だけに依存する）

（2）________性・・・$v_k(t)$ は、時刻 a までに何人来たか、いつ来たかには無関係
＝ 重なり合わない時間帯の到着の仕方は、互いに独立

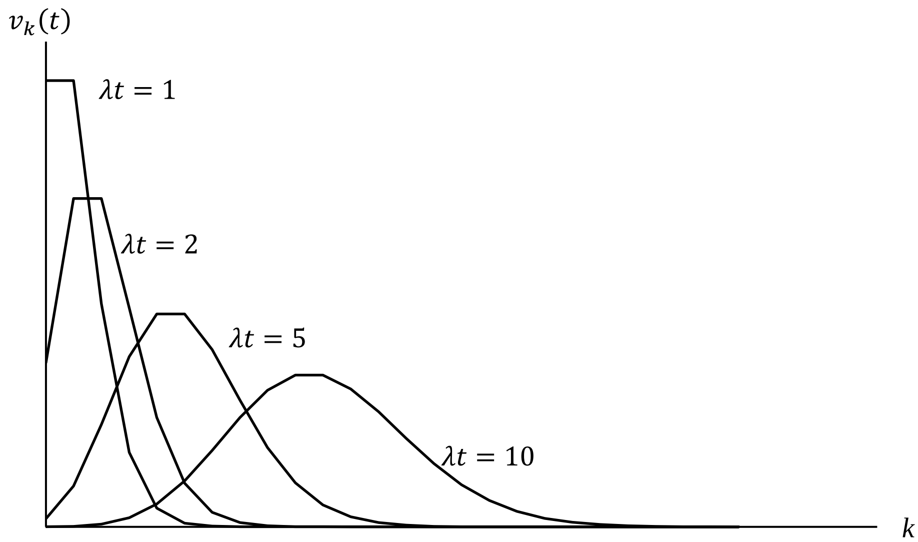
（3）________性・・・十分短い時間間隔の間に、客が 2 人以上来る確率は無視できるほど小さい
＝ 客は 1 人ずつ独立にやって来る
このとき、以下が成立する

$$\psi(t)=\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t) \quad \text{とするとき、} \lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=0$$

上記に加えて、どんな時間間隔にも 1 人も到着しない、および無数に到着する、という 2 つの極端な場合は起こらない仮定すると、以下が導かれる

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (k=0,1,2\cdots)$$

※これはポアソン分布の式であるから、この到着のことをポアソン到着と呼ぶ



ポアソン分布

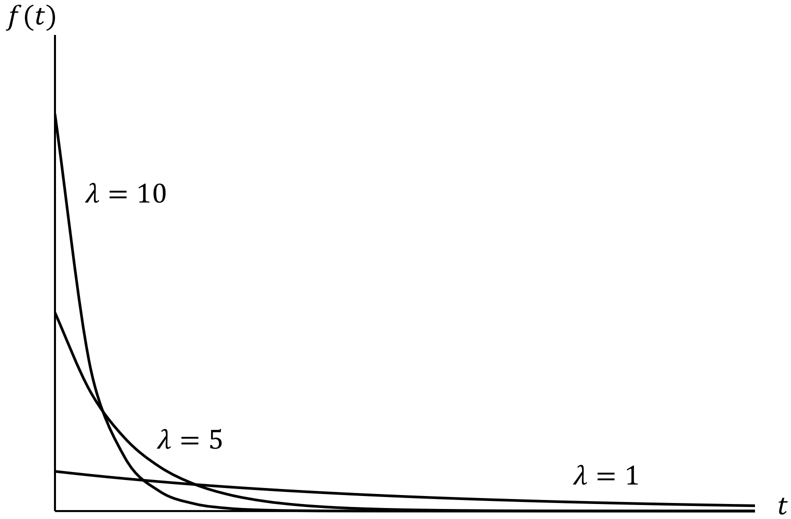
◆ポアソン到着とマルコフ性

ポアソン到着　＝　時間間隔 t の間に客が k 人到着する確率がポアソン分布に従う

・・・到着間隔は？

◎確率密度関数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0)$$



指数分布

◎分布関数

※前の客が到着してから、時間間隔 t までに次の客が到着する確率 $P\{T < t\} = F(t)$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

◎マルコフ性

ポアソン到着での到着間隔について、以下が成立する

$$P\{T < s + t \,|\, T > s\} = 1 - e^{-\lambda t} = P\{T < t\}$$

（参考：テキスト p. 130）

これから時間間隔 t の間に客が到着する確率は、今までどのくらいの間、客が到着していないかには**無関係**

＝ポアソン到着での到着間隔は、過去の履歴に影響されない

この性質を**マルコフ性**という

※ポアソン到着が「でたらめな到着」である理由　⇒　指数分布のマルコフ性