テキスト第７章　§7.3　(p. 131～)

◆サービス時間の法則

到着間隔の場合と同様に、サービス時間についても確率法則を規定する

◎レギュラー・サービス（記号 *D*）

サービス時間が一定　＝　μ を（平均）サービス率とすると、$\dfrac{1}{\mu}$ が常に一定

◎一般の到着（記号 *G*）

サービス時間の分布として、一定の確率分布を仮定しない

◎次数 k のアーラン・サービス（記号 E_k）

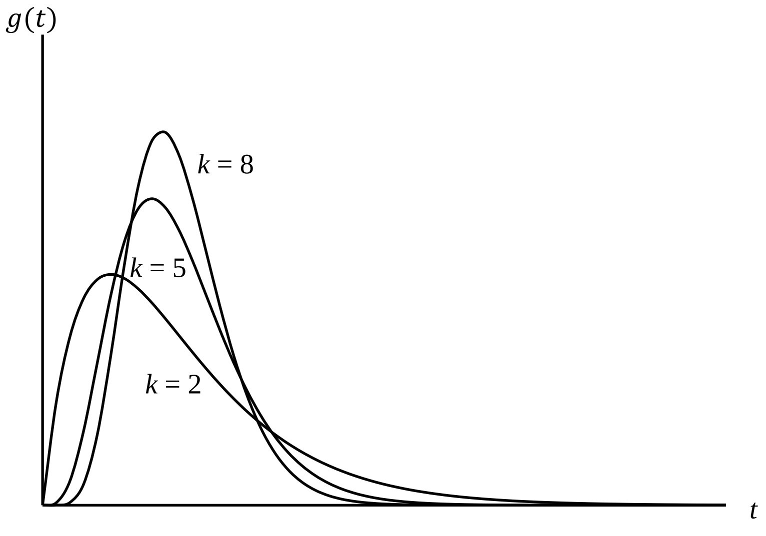
サービス時間の分布が次数 k のアーラン分布に従う

次数 k のアーラン分布・・・$k = 1$ のときは指数分布、$k \to \infty$とすれば $\dfrac{1}{\mu}$ で確率１をとる単位分布

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\mu k t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

※指数サービスとレギュラー・サービスの中間的な分布

（$k = 1$ のときは指数サービス、$k \to \infty$ のときはレギュラー・サービス）



アーラン分布

※次数 k のアーラン分布は、パラメータ $k\mu$ の指数分布に従う k 個の独立な確率変数の和の分布

＝k 個の独立な指数サービスを続けて受けて、はじめて１つのサービスが終了する

◎指数サービス（記号 M）

サービス時間の長さがランダムなサービス

到着間隔の場合と同様に、定常性、独立性、希少性から以下が導かれる

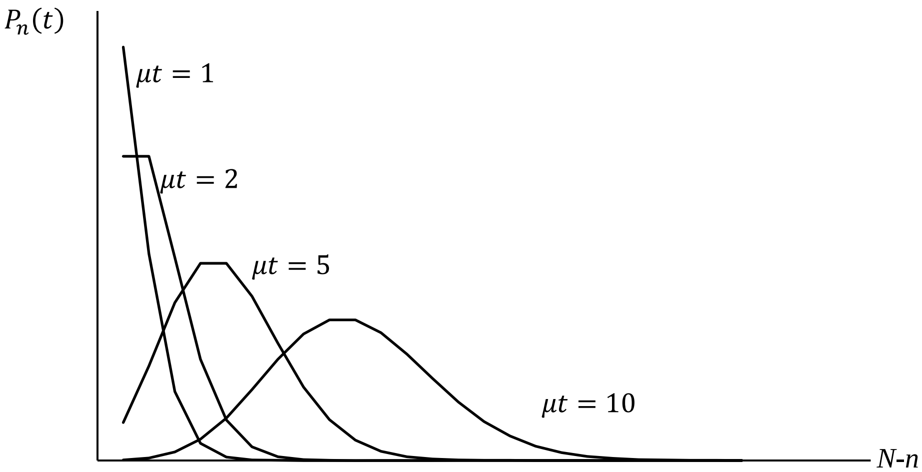
$t=0$ でシステム内に N 人の客がいるものとする（今後客が到着することはなく、サービスが終わるとシステムから去っていく）

時刻 t でシステム内に n 人の客がいる確率$P_n(t)$ は以下のようになる

$$\begin{cases} P_n(t) = e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!} & (n = 1, 2, \cdots, N) \\ P_0(t) = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{N} P_n(t) & \end{cases}$$

※$N-n$ はサービスを終えてシステムを去った人数

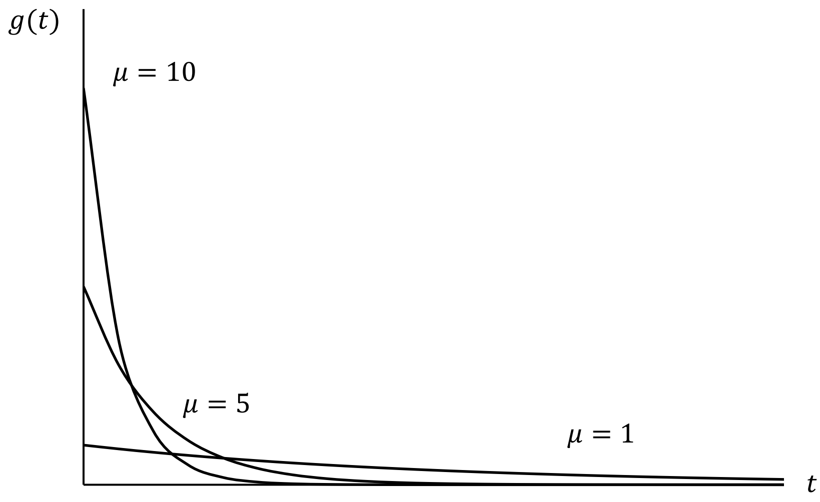
これは片側ポアソン分布（ゼロ切断ポアソン分布）である



◎確率密度関数

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (t \geq 0)$$

※サービス時間の長さの分布は、パラメータ μ の指数分布に従う



◆客の到着とサービス時間のまとめ

客の到着法則およびサービス時間の法則は、以下のようにまとめられる。

<table>
<tr><th></th><th>客の到着</th><th>サービス時間</th></tr>
<tr><td>M</td><td>ポアソン到着

到着人数の分布：
$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad(k=0,1,2\cdots)$$
到着間隔の分布：
$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\qquad(t\geq 0)$$</td><td>指数サービス

サービスが終了した人数の分布：
$$\begin{cases}P_n(t)=e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!} & (n=1,2,\cdots,N)\\ P_0(t)=1-\displaystyle\sum_{n=1}^{N}P_n(t)\end{cases}$$
サービス時間の分布
$$g(t)=\mu e^{-\mu t}\qquad(t\geq 0)$$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>レギュラー到着

到着間隔：$\dfrac{1}{\lambda}$ で一定</td><td>レギュラー・サービス

サービス時間：$\dfrac{1}{\mu}$ で一定</td></tr>
<tr><td>G</td><td>一般の到着

特定の分布を仮定しない
独立性を仮定する場合は GI と表記</td><td>一般のサービス

特定の分布を仮定しない
独立性を仮定する場合は GI と表記</td></tr>
<tr><td>E_k</td><td>次数 k のアーラン到着

到着間隔の分布：
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda kt} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$
※レギュラー到着とポアソン到着の中間的な分布</td><td>次数 k のアーラン・サービス

サービス時間の分布：
$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{(\mu k)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\mu kt} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$
※レギュラー・サービスと指数サービスの中間的な分布</td></tr>
</table>

【練習問題】

※以下の問題においては $e = 2.71828$ とする。

（問題１）レギュラー到着の待ち行列モデルにおいて、1 時間に 5 人の客がやって来る時の平均到着率と到着間隔を求めよ。

（問題２）レギュラー・サービスの待ち行列モデルにおいて、$\mu = 0.25$ のときのサービス時間を求めよ。

（問題３）ポアソン到着の待ち行列モデルにおいて、1 時間あたり平均 0.4 人の客がやって来るとする。5 時間の間に 2 人の客が到着する確率を求めよ。

（問題４）指数サービスの待ち行列モデルにおいて、平均サービス率を $\mu = 0.75$ とするとき、サービス時間が 4 となる確率を求めよ。