テキスト第７章 §7.4、7.5 （p. 133～）

◆平均値の法則

待ち行列を考えるにあたって、参考となる統計量には以下のようなものがある

L ：平均系内数（システム内にいる客の平均数）
L_q：待っている客の平均数
W：平均滞在時間（客がシステムに到着してから、サービスが終了して立ち去るまでの平均時間）
W_q：平均待ち時間

これらの量に関して、ごく一般の仮定のもとで以下が成立する（**リトルの公式**）

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L = \lambda W$$

◆$M/M/1$ の待ち行列

待ち行列として最もポピュラーな $M/M/1\,(\infty)$モデルについて分析を行う
→ ポアソン到着、指数サービス、窓口数 1、系の容量無限

系内の人数や待ち時間の計算
⇒ 時刻 t で系内にいる客数（系内数）が n 人である確率 $P_n(t)$ が分かるとよい

※$P_n(t)$ を「**状態確率**」という

◎状態確率と定常分布

システムの利用率 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ を用いて考える

(1) $\rho \geq 1$ のとき、系内数は限りなく増大する
(2) $\rho < 1$ のとき、十分な時間が経過すると（$t \to \infty$）、$P_n(t)$ は一定の値 P_n に収束する
⇒ この P_n を**定常分布**、$\rho < 1$ を**平衡条件**という

$M/M/1$ の待ち行列の定常分布は以下のようになる

$$P_n = \rho^n(1-\rho) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

また、定常分布が存在する状態を「**平衡状態**」という

続いて、平衡状態における待ち行列の様々な統計量を計算する

◎平均系内数 L

平均系内数は、システム内にいる客数の平均である

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

◎待っている客の平均数 L_q

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

※ L と L_q について、$L = L_q + \rho = L_q + \lambda/\mu$ の関係がある

⇒ 利用率 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ はサービスを受けている客がいる確率（＝窓口にいる客の平均数）でもあるから、待っている客の平均数 L_q にサービスを受けている客数を加算すれば平均系内数 L となることが分かる

◎平均滞在時間 W

平均滞在時間は、客がシステムに到着してから、サービスを終えて立ち去るまでの時間である
リトルの公式を利用すると

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

◎平均待ち時間 W_q

リトルの公式を利用すると

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

※ W と W_q について、$W = W_q + 1/\mu$ の関係がある

⇒ $\frac{1}{\mu}$ は平均サービス時間であるから、平均待ち時間 W_q に $\frac{1}{\mu}$ を加算すれば平均滞在時間 W となることが分かる

◎待たなければならない確率 $P\{w > 0\}$

窓口が 1 つであるから、系内に 1 人以上の客がいれば待たなければならない。よって、以下の式が導かれる

$$P\{w > 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 - P_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

【例題】

ある銀行に、窓口数 1 の税金相談窓口がある。相談に来る客の到着が 1 時間当たり 10 人のポアソン分布、1 人の相談時間が平均 5 分の指数分布に従うとき、以下の統計量を求めよ。

※単位時間は「分」とする。

(1) 窓口に客のいる確率（$\overline{P} = 1 - P_0$）

この問題は $M/M/1$ モデルの待ち行列と考えられる。

問題文から、平均到着率 λ と平均サービス率 μ は、

$$\lambda = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$$\mu = \frac{1}{5}$$

相談窓口に客のいる確率は、利用率 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ に等しいから、

$$\overline{P} = \rho =$$

(2) 窓口で待っている客の平均数（L_q）

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} =$$

(3) 相談に来ている客の平均数（L）

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} =$$

(4) 窓口の平均待ち時間（W_q）

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q =$$

または

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} =$$

(5) 相談に来てから立ち去るまでの平均滞在時間（W）

$$W = \frac{1}{\lambda} L =$$

または

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} =$$

【演習問題】

例題と同じ相談窓口で、相談に来る客の到着が 1 時間当たり 6 人のポアソン分布、1 人の相談時間が平均 9 分の指数分布に従うとき、以下の統計量を求めよ。

※単位時間は「分」とする。

(1) 窓口に客のいる確率（$\overline{P}=1-P_0$）

$$\lambda =$$

$$\mu =$$

$$\overline{P}=\rho =$$

(2) 窓口で待っている客の平均数（L_q）

$$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=$$

(3) 相談に来ている客の平均数（L）

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}=$$

(4) 窓口の平均待ち時間（W_q）

$$W_q=\frac{1}{\lambda}L_q=$$

(5) 相談に来てから立ち去るまでの平均滞在時間（W）

$$W=\frac{1}{\lambda}L=$$