【復習】

◆リトルの公式

$$L_q = \lambda W_q$$
$$L = \lambda W$$

L ：平均系内数、L_q：待っている客の平均数、W：平均滞在時間、W_q：平均待ち時間

◆$M/M/1$の待ち行列

システムの利用率 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

(1) $\rho \geq 1$ のとき、系内数は限りなく増大

(2) $\rho < 1$ のとき、十分な時間が経過すると、状態確率 $P_n(t)$ は一定の値 P_n に収束（定常分布）

$M/M/1$ の待ち行列の定常分布

$$P_n = \rho^n(1-\rho) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

平衡状態における待ち行列の統計量

	系	列
人数	平均系内数 L $$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$	待っている客の平均数 L_q $$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$
時間	平均滞在時間 W $$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\mu-\lambda}$$	平均待ち時間 W_q $$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

※ $L = L_q + \rho = L_q + \lambda/\mu$

※ $W = W_q + 1/\mu$

待たなければならない確率 $P\{w > 0\}$

$$P\{w > 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 - P_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

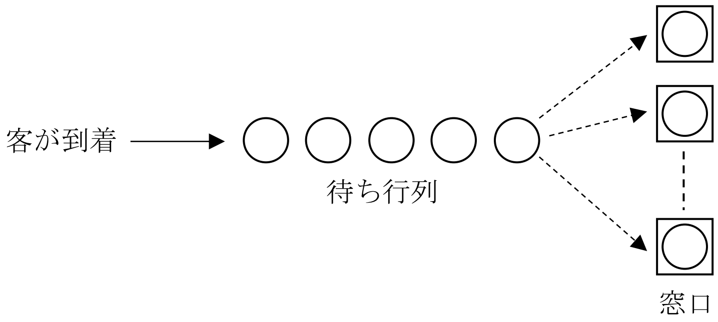
テキスト第７章　§7.6（p. 140～）

◆$M/M/s$ の待ち行列

複数窓口（窓口数 s 個）の待ち行列

・・・窓口は並列に並んでおり、それぞれ独立にサービスを実施

・・・到着した客は一列に並び、空いた窓口へと順番に移動する



◎利用率 ρ

窓口が s 個ある場合の利用率は以下のようになる

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{a}{s} \qquad \left(a = \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

◎定常分布 P_n

$M/M/s$ の待ち行列における定常分布は以下の通りである

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{a^n}{n!} P_0 & (0 \le n < s) \\ P_n = \dfrac{a^n}{s!\, s^{n-s}} P_0 = \dfrac{s^n \rho^n}{s!} P_0 & (s < n) \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{a^n}{n!} + \dfrac{a^s}{(s-1)!\,(s-a)}} \end{cases}$$

◎待っている客の平均数 L_q

$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$　より計算すると

$$L_q = \frac{a^{s+1}}{(s-1)!\,(s-a)^2} P_0 = \frac{\lambda\mu \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2} P_0$$

◎**平均系内数 L**

同様に　$L=\sum_{n=s}^{\infty} nP_n$　より計算して整理すると

$$L = L_q + a = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

※これは $M/M/1$ の待ち行列と同様の関係である

⇒ 待っている客の平均数 L_q に窓口にいる客の平均数 $a=\frac{\lambda}{\mu}$ を加算すれば平均系内数 L となる

◎**平均待ち時間 W_q**

リトルの公式を利用すると

$$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}P_0$$

◎**平均滞在時間 W**

リトルの公式を利用すると

$$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\lambda}\left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = W_q + \frac{1}{\mu}$$

※これも $M/M/1$ の待ち行列と同様の関係である

⇒　平均待ち時間　W_q に平均サービス時間 $\frac{1}{\mu}$ を加算すれば平均滞在時間 W となる

◎**待たなければならない確率 $P\{w>0\}$**

窓口が s 個であるから、ある人が到着した時、系内に s 人以上の客がいれば待たなければならない。

よって、以下の式が導かれる

$$P\{w>0\} = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \frac{a^s}{(s-1)!\,(s-a)}P_0 = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)}P_0$$

※なお上記の統計量について、いずれも

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{a}{s}$$

$$a = \frac{\lambda}{\mu}$$

である

【演習問題】

ある施設の入場券販売窓口は 2 か所あり、客が 1 時間に平均 20 人のポアソン到着でやって来る。
窓口での発券にかかる時間が 1 人あたり平均 2 分の指数分布に従っているとき、以下の問いに答えよ。
なお単位時間は「分」とする。

（問題１）利用率 ρ を求めよ。

ポアソン到着、指数サービス、窓口数 2 であるから $M/M/2$ の待ち行列となる。問題文より

$$\lambda = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

であるから、利用率は

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

（問題２）定常分布 P_0 を求めよ。

$$a = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!\,(s-a)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{(2-1)!\left(2-\frac{2}{3}\right)}} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1}{1!} + \frac{\frac{4}{9}}{1! \times \frac{4}{3}}}$$

$$=$$

（問題３）L_q、L、W_q、W をそれぞれ求めよ。

$$L_q = \frac{a^{s+1}}{(s-1)!\,(s-a)^2} P_0 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{(2-1)!\left(2-\frac{2}{3}\right)^2} P_0 =$$

$$L = L_q + a =$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q =$$

$$W = \frac{1}{\lambda} L =$$