

テキスト第7章 §7.7 (p.149～)

◆ $M/M/1(N)$ の待ち行列・・・待ち行列に制限のある場合

ポアソン到着、指数サービス、窓口数1で、系の中に最大 N 人しか入ることができない
→系内に N 人いる状態で次に到着した客は、列に並ばずそのまま立ち去る

※ N がある程度以上大きい場合 → 実質的に $M/M/1(\infty)$ として解析

◎利用率と定常分布

システムの利用率：

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\rho < 1$ のとき、以下の関係が成立する

◎ $M/M/1(N)$ の待ち行列の定常分布

$$P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

※ $n > N$ に対しては $P_n = 0$ である

◎平均系内数 L

$L = \sum_{n=0}^N n P_n$ より計算して整理すると

$$L = \rho \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

◎待っている客の平均数 L_q

同様に L_q を計算すると、

$$L_q = \rho^2 \frac{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

※ $M/M/1(\infty)$ のときと同様に、 $L = L_q + (1 - P_0)$ の関係がある

※ $(1 - P_0)$ は窓口でサービスを受けている客の平均数

◎平均滞在時間 W

リトルの公式を利用すると

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \rho \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

◎平均待ち時間 W_q

リトルの公式を利用すると

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \rho^2 \frac{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

◎呼損率 P_N

系の長さに制限のある待ち行列で、新たに到着した客が待たずに立ち去る確率を**呼損率**という呼損率は、客が到着した時点で系内に N 人いる確率に等しい

$$P_N = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^N$$

補足 : $\rho = 1$ のとき、以下の関係が成立する

◎定常分布 :

$$P_n = \frac{1}{N+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

◎平均系内数 L :

$$L = \frac{N}{2}$$

◎待っている客の平均数 L_q

$$L_q = \frac{N(N-1)}{2(N+1)}$$

◎平均滞在時間 W

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{N}{2\lambda}$$

◎平均待ち時間 W_q

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{N(N-1)}{2\lambda(N+1)}$$

◎呼損率 P_N

$$P_N = \frac{1}{N+1}$$

【練習問題】

ある大学の学習相談室に相談員が1人おり、やって来る学生数は1時間あたり12人のポアソン分布に従っているものとする。また、1人あたりの相談時間は平均4分の指数分布とする。相談室には5人までしか入れず、それ以上来た学生は帰ってしまうものとする。このとき、以下の問いに答えよ。なお、単位時間は「分」とする。

(問題1) システムの利用率 ρ を求めよ。

問題文より、 $M/M/1(5)$ の待ち行列である。平均到着率、平均サービス率を計算すると

$$\lambda = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}, \quad \mu = \frac{1}{4}$$

よって利用率は

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} =$$

(問題2) 相談室にいる学生の平均数 L を求めよ。

$$L = \rho \frac{1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})} =$$

(問題3) 待っている学生の平均数 L_q を求めよ。

$$L_q = \rho^2 \frac{1 - N\rho^{N-1} + (N - 1)\rho^N}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})} =$$

(問題4) 平均滞在時間 W を求めよ。

$$W = \frac{1}{\lambda} L =$$

(問題5) 平均待ち時間 W_q を求めよ。

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q =$$

(問題6) 呼損率 P_N を求めよ。

$$P_N = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^N =$$