◆シミュレーション

実際には試行できないことなどを、模擬的に行う手法をシミュレーションという

・・・現実問題を真似たモデル（模型）による模擬実験

●シミュレーションを行う理由

・実験をするのに大きな危険を伴う
・やり直しがきかない
・実験に膨大な費用がかかる
・全般の関連機能や因果関係が不明　など

●モンテカルロ法

シミュレーションの手法のうち、特に「乱数を用いて行う方法」をモンテカルロ法という

また、コンピュータの利用により、以下のような利点がある

・モデル、変動量の変更が容易
・演算速度が速い
・費用が少ない

※乱数とは言葉の通り「でたらめな並びの数」のことをいう

◆シミュレーションの適用：待ち行列問題

実際にシミュレーションを待ち行列問題に適用してみよう

【例題】学内の銀行キャッシュサービスへ、到着間隔が平均 2 分の指数分布に従って客が来ている。また、サービス時間の分布は平均 1.5 分の指数分布に従うとする。このとき、乱数を用いたシミュレーションにより窓口の利用率 ρ、平均待ち時間 W_q、平均滞在時間 W、平均待ち人数 L_q、平均系内人数 L を求めよ。

（手順１）到着間隔とサービス時間を乱数を用いて生成する（＝モンテカルロ法）

到着間隔、サービス時間いずれも指数分布に従うから、逆関数法により以下のように指数乱数を発生させるとよい

到着間隔（平均 $\frac{1}{\lambda}=2$）：$t_1=-2\times\ln(U_1)$　　　ただし U_1 は 0～1 の一様乱数

サービス時間（平均 $\frac{1}{\mu}=1.5$）：$t_2=-1.5\times\ln(U_2)$　　　ただし U_2 は 0～1 の一様乱数

（手順２）到着時刻、サービス開始時刻、サービス終了時刻を計算する

到着時刻：0 から開始し、その客の到着間隔を前の客の到着時刻に足す

サービス開始時刻：前の客のサービス終了時刻と、その客の到着時刻のうち遅い方をとる

サービス終了時刻：その客のサービス開始時刻にサービス時間を足す

（手順３）待ち時間、滞在時間、待ち人数、系内人数を計算する

待ち時間：0 から開始し、その客のサービス開始時刻から到着時刻を引く

滞在時間：その客の待ち時間にサービス時間を足す

待ち人数：ある客より前に到着した客のうち、その客の到着時刻よりサービス終了時刻が遅い人数

系内人数：待ち人数に到着した客の数 1 を足す

（手順４）利用率 ρ、平均待ち時間 W_q、平均滞在時間 W、平均待ち人数 L_q、平均系内人数 L を計算する

利用率 ρ：サービス時間の合計／総経過時間

平均待ち時間 W_q：待ち時間の平均

平均滞在時間 W：滞在時間の平均

平均待ち人数 L_q：待ち時間の合計／総経過時間

平均系内人数 L：滞在時間の合計／総経過時間

※総経過時間は「最後の客のサービス終了時刻」と等しい

●Excel への数式入力

以上の数式を Excel に入力し、シミュレーションを作成する。A 列には到着した客数を入力することとし、数が多い方がよいので 1000 人までシミュレーションを実施する。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		到着間隔	サービス時間	到着時刻	開始時刻	終了時刻	待ち時間	滞在時間	待ち人数	系内人数
2	1	0	②	0	0	⑤	0	⑦	0	⑨
3	2	①		③	④		⑥		⑧	
4	3									
5	4									
6	5									

⋮

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
998	997									
999	998									
1000	999									
1001	1000									
1002										
1003	利用率	⑩								
1004	平均待ち時間	⑪								
1005	平均滞在時間	⑫								
1006	平均待ち人数	⑬								
1007	平均系内人数	⑭								
1008										

① =−2*LN(RAND())

② =−1.5*LN(RAND())

③ =D2+B3

④ =MAX(F2,D3)

⑤ =E2+C2

⑥ =E3−D3

⑦ =C2+G2

⑧ =COUNTIF(F$2:F2,”>”&D3)

⑨ =I2+1

⑩ =SUM(C2:C1001)/F1001

⑪ =AVERAGE(G2:G1001)

⑫ =AVERAGE(H2:H1001)

⑬ =SUM(G2:G1001)/F1001

⑭ =SUM(H2:H1001)/F1001

●シミュレーション結果の検証

以下はシミュレーション結果の一例である

※乱数を用いて到着間隔、サービス時間を生成しているため、シミュレーションを実施するごとに結果の数値は異なる

999	998	6.452837632	3.586939211	1984.920675	1986.963188	1990.550127	2.042513407	5.629452617	3	4
1000	999	3.454704789	2.116992579	1988.37538	1990.550127	1992.66712	2.174747828	4.291740407	1	2
1001	1000	0.68629417 7	6.014429169	1989.061674	1992.66712	1998.681549	3.605446229	9.619875398	2	3
1002										
1003	利用率	0.731441512								
1004	平均待ち時間	3.800022682								
1005	平均滞在時間	5.261941337								
1006	平均待ち人数	1.901264703								
1007	平均系内人数	2.632706215								
1008										

利用率：　$\rho = 0.731441512$

平均待ち時間：$W_q = 3.800022682$

平均滞在時間：$W = 5.261941337$

平均待ち人数：$L_q = 1.901264703$

平均系内人数：$L = 2.632706215$

※公式から理論値を求め、シミュレーションの結果と比較してみよう

この問題は $M/M/1(\infty)$ 型の待ち行列で、平均到着間隔が 2 分、平均サービス時間が 1.5 分だから、

$\lambda = \frac{1}{2}$、　$\mu = \frac{1}{1.5}$

よって利用率は　$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.5}{2} = 0.75$

平均待ち人数：　$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} =$

平均系内人数：　$L = \frac{\rho}{1-\rho} =$

平均待ち時間：　$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q =$

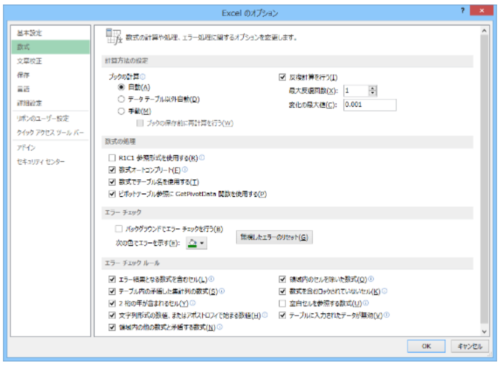
平均滞在時間：　$W = \frac{1}{\lambda} L =$

●繰り返し計算による結果の集計

乱数を用いたシミュレーションでは実行するごとに結果が変化するので、多数の繰り返し計算をおこなって平均値を計算することでより安定した値が求められる

※先ほどのシミュレーションに以下のような集計部分を追加し、繰り返し計算を行って平均値を求めてみよう

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
992	991	0.640446407	1.342755071	1890.951119	1893.441	1894.783	2.489495	3.83225	2	3	
993	992	2.085499423	0.3066984	1893.036618	1894.783	1895.09	1.746751	2.053449	3	4	
994	993	6.932734974	2.48922747	1899.969353	1899.969	1902.459	0	2.489227	0	1	
995	994	1.153039696	0.237308509	1901.122393	1902.459	1902.696	1.336188	1.573496	1	2	
996	995	2.271863924	7.068364788	1903.394257	1903.394	1910.463	0	7.068365	0	1	
997	996	1.62988254	0.587757968	1905.02414	1910.463	1911.05	5.438482	6.02624	1	2	
998	997	0.509604044	1.960732734	1905.533744	1911.05	1913.011	5.516636	7.477369	2	3	
999	998	2.00843525	1.681883431	1907.542179	1913.011	1914.693	5.468934	7.150817	3	4	
1000	999	0.025049014	0.231391783	1907.567228	1914.693	1914.924	7.125768	7.35716	4	5	
1001	1000	4.348261542	3.70052957	1911.915489	1914.924	1918.625	3.008898	6.709428	3	4	
1002											
1003	回数	=B1003+1									
1004											
1005		今回	合計	平均							
1006	利用率	=SUM(C2:C1001)/F1001	=B1006+C1006	=C1006/$B$1003							
1007	平均待ち時間	=AVERAGE(G2:G1001)	=B1007+C1007	=C1007/$B$1003							
1008	平均滞在時間	=AVERAGE(H2:H1001)	=B1008+C1008	=C1008/$B$1003							
1009	平均待ち人数	=SUM(G2:G1001)/F1001	=B1009+C1009	=C1009/$B$1003							
1010	平均系内人数	=SUM(H2:H1001)/F1001	=B1010+C1010	=C1010/$B$1003							
1011											



※数式を入力すると循環参照のエラーが出るが、いったん無視して続行する。すべての入力が終わったら、「ファイル」メニューから「オプション」→「数式」を選んで「計算方法」を「手動」とし、「反復計算を行う」にチェックを入れて「最大反復回数」を「1」とするとF9キーで繰り返し計算が可能になる。

以下はこのシミュレーションを1000回繰り返したときの結果である。平均の部分を確認し、先ほど求めた理論値と比較してみよう

回数	1000		
	今回	合計	平均
利用率	0.771549731	750.8006923	0.750800692
平均待ち時間	3.938393053	4480.263034	4.480263034
平均滞在時間	5.448647156	5983.411731	5.983411731
平均待ち人数	2.012023072	2245.83319	2.24583319
平均系内人数	2.783572804	2996.633882	2.996633882

参考文献：「ORへのステップ」、長畑秀和、共立出版（2002）

◆待ち行列モデルのまとめと演習問題

●リトルの公式

$L_q = \lambda W_q$

$L = \lambda W$

●$M/M/1$ の待ち行列

利用率：$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

定常分布：$P_n = \rho^n(1-\rho) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

統計量	系	列
人数	平均系内人数 L $$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$	平均待ち人数 L_q $$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$
時間	平均滞在時間 W $$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\mu-\lambda}$$	平均待ち時間 W_q $$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

●$M/M/s$ の待ち行列

※複数窓口（窓口数 s 個）の待ち行列

利用率：$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{a}{s} \qquad \left(a = \dfrac{\lambda}{\mu}\right)$

定常分布：

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{a^n}{n!}P_0 & (0 \leq n < s) \\ P_n = \dfrac{a^n}{s!\,s^{n-s}}P_0 = \dfrac{s^n\rho^n}{s!}P_0 & (s < n) \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\dfrac{a^n}{n!} + \dfrac{a^s}{(s-1)!\,(s-a)}} \end{cases}$$

統計量	系	列
人数	平均系内人数 L $$L = L_q + a = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$	平均待ち人数L_q $$L_q = \frac{a^{s+1}}{(s-1)!\,(s-a)^2}P_0 = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}P_0$$
時間	平均滞在時間 W $$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\lambda}\left(L_q + \frac{\lambda}{\mu}\right) = W_q + \frac{1}{\mu}$$	平均待ち時間 W_q $$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}P_0$$

●$M/M/1(N)$ の待ち行列

※系の中に最大 N 人しか入ることができず、以降に到着した客は待たずに立ち去る

利用率：$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

定常分布：$P_n = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n \qquad (n = 0,1,2,\cdots N)$

※ $n > N$ に対しては $P_n = 0$

呼損率：$P_N = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N$

統計量	系	列
人数	平均系内人数 L $L = \rho\dfrac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$	平均待ち人数L_q $L_q = \rho^2\dfrac{1-N\rho^{N-1}+(N-1)\rho^N}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$
時間	平均滞在時間 W $W = \dfrac{1}{\lambda}L = \rho\dfrac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$	平均待ち時間 W_q $W_q = \dfrac{1}{\lambda}L_q = \rho^2\dfrac{1-N\rho^{N-1}+(N-1)\rho^N}{\lambda(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$

【演習問題】

$M/M/1$ 型の待ち行列モデルで、客が 1 時間に平均 12 人到着し、1 人あたりのサービス時間を平均 4 分とするとき、以下の問いに答えよ。なお単位時間は「分」とする。

（問題１）利用率 ρ、平均系内人数 L、平均待ち人数 L_q、平均滞在時間 W、平均待ち時間 W_q をそれぞれ求めよ。

（問題２）窓口を 4 つに増やした時の利用率 ρ を求めよ。

（問題３）窓口が 1 つのときに系内人数を最大 3 人に制限した。このときの呼損率を求めよ。