

シミュレーション論 I

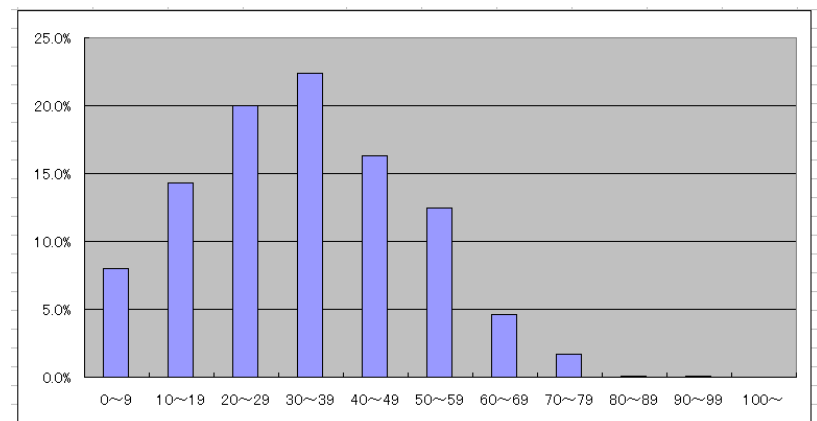
第4回

基礎的なシミュレーション手法

第3回のレポート 解答例

- 1000回繰り返した際の必要枚数ごとの割合を記載(例)

繰り返し回数	必要枚数	割合
1000	0~9	8.0%
	10~19	14.3%
	20~29	20.0%
	30~39	22.4%
	40~49	16.3%
	50~59	12.5%
	60~69	4.6%
	70~79	1.7%
	80~89	0.1%
	90~99	0.1%
	100~	0.0%



第3回 別課題1の解答

- 前回のプリント等も参照して確認してください

① =RAND()

② =IF(B3<0.5,3,-7)

③ =D2+C3

④ =MIN(D3:D17)

⑤ =IF(D18<0,ABS(D18),0)

⑥ =F2+1

⑦ =IF(AND(D\$19>=H2,D\$19<=I2),J2+1,J2)

⑧ =J2/F\$2

第3回 別課題の解答(課題2)

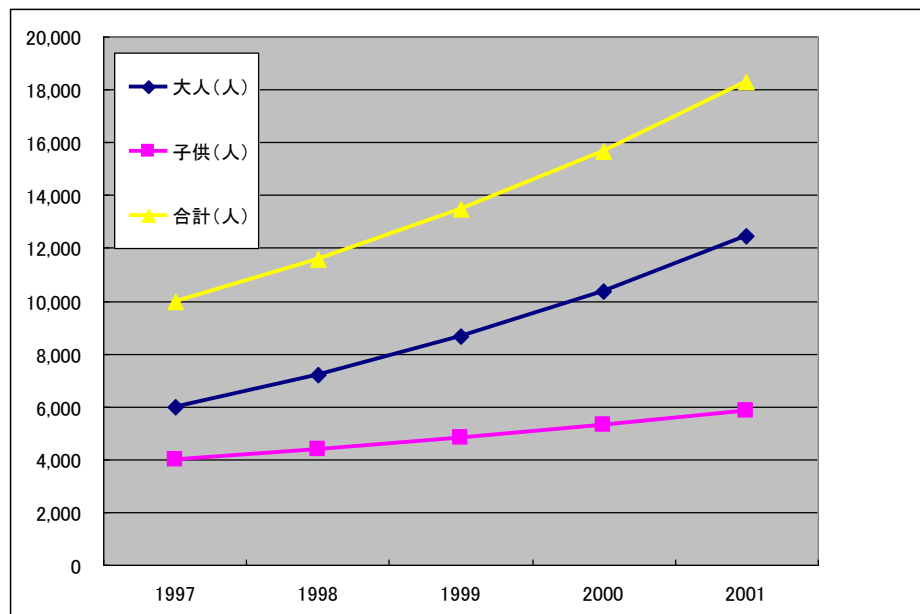
- 手計算で遊園地の入場者数・収入を予測してみましょう。
- ある遊園地の1997年の入場者数は「大人6,000人、子供4,000人」の計10,000人であった。
- 入場者数の1年間の平均増加率は大人20%、子供10%となっている。

- (1) 2001年までの入場者数(大人、子供、合計)を計算し、グラフを描け。
- (2) 入場料は大人1,000円、子供500円である。1997年～2001年までの入場料収入の推移を計算せよ。

第3回 別課題の解答(課題2(1))

■ 入場者数の推移

年	大人(人)	子供(人)	合計(人)
1997	6,000	4,000	10,000
1998	7,200	4,400	11,600
1999	8,640	4,840	13,480
2000	10,368	5,324	15,692
2001	12,442	5,856	18,298



第3回 別課題の解答(課題2(2))

- 入場料収入の推移

年	大人(万円)	子供(万円)	合計(万円)
1997	600	200	800
1998	720	220	940
1999	864	242	1,106
2000	1,037	266	1,303
2001	1,244	293	1,537

今回の内容

- シミュレーションについて、作成の手順やどのように利用されているかは学んできた
- では実際にシミュレーションを作成するにはどのような**手法**があるのか？
- シミュレーションをおこなう際の基礎的な計算手法や方法論を学ぶ

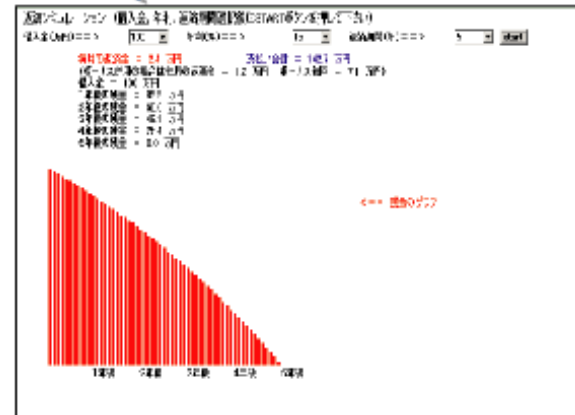
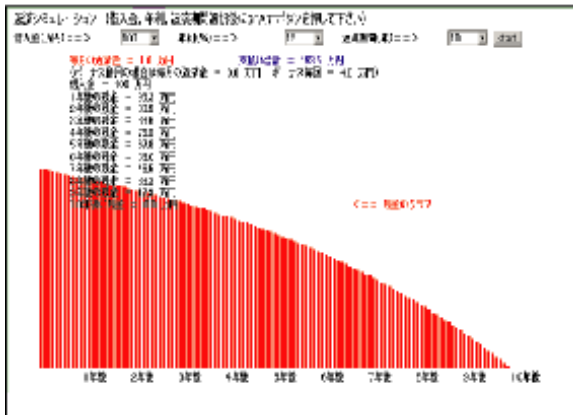
様々なシミュレーション

- シミュレーションはその分析対象、使用目的によって様々なものがある。経済・経営・社会システムを対象とするシミュレーションについても以下をはじめ様々なものが存在する。
- 単純な数値計算の手法としてのシミュレーション
 - ローン返済額の計算、税金計算など
- 複雑な数式を解くためのシミュレーション
 - 数学的に解くのが困難な問題へのアプローチ
- 将来の予測としてのシミュレーション
 - 企業の売り上げ予想、景気予測、人口増加予測など

単純な数値計算としてのシミュレーション

- 例: ローン返済のシミュレーション
- 銀行などからお金を借りるとして、どのような返済方法がよいか?

金額(いくら借りるか?)
利率(利息はどうか?)
返済期間(どれくらいで返すか?)
etc...



- 様々な場合をあらかじめ試したり、分かりやすく相手に示したりできる。

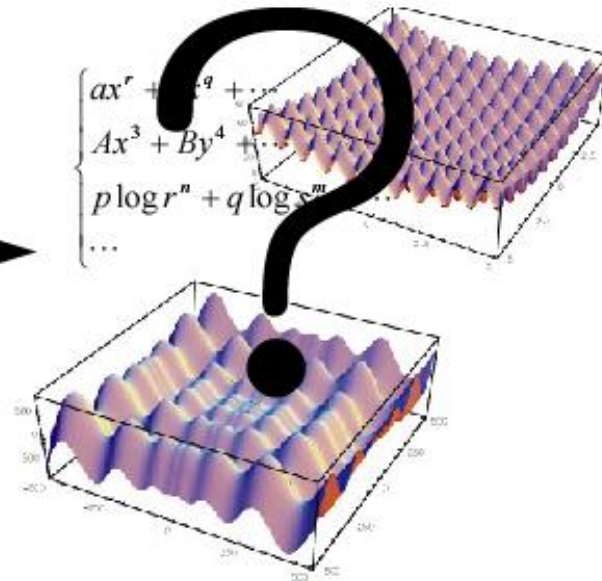
複雑な問題を解くためのシミュレーション

- 分析対象をモデル化した際、数学的に解けない、または解くのが困難な問題に行き当たることがよくある。
- コンピュータを用い、様々な計算手法を使うことでそういった問題でも（近似的に）解くことができる。

この経済システムでの
最適な状態を探ろう！



モデル化

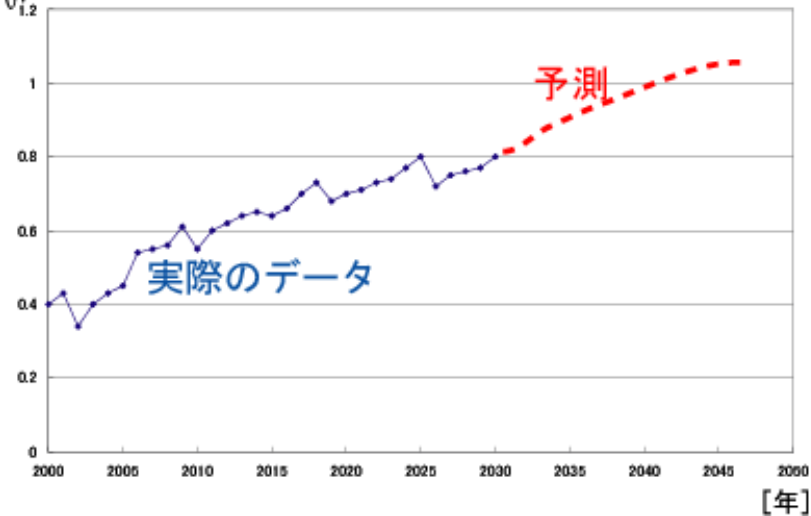


将来の予測としてのシミュレーション

- 経済理論や過去のデータなどを用いてモデルを作り、将来どうなるかを予測する。
- 例: ある国のGDPの伸び率をシミュレーションする

経済理論や実データから
シミュレーションのモデルを作成

$$\log(C) = 0.27261 + 0.26787 * \log(Y) - 0.00542 * R + 0.71102 * \log(C-1)$$



数値計算の基礎

- シミュレーションを行う際に数値を計算する手法を考える
- 方程式が明確で簡単に解ける場合は先に解いてしまえばいいが、非常に複雑な場合や数学的には解けない場合はどうすればいいか？
↓
- 様々な手法を用いて「**近似的に**」計算する

近似計算の基礎：2分法

- 1次方程式の解を近似的に求める方法

ある区間を挟み込んで関数の値を計算



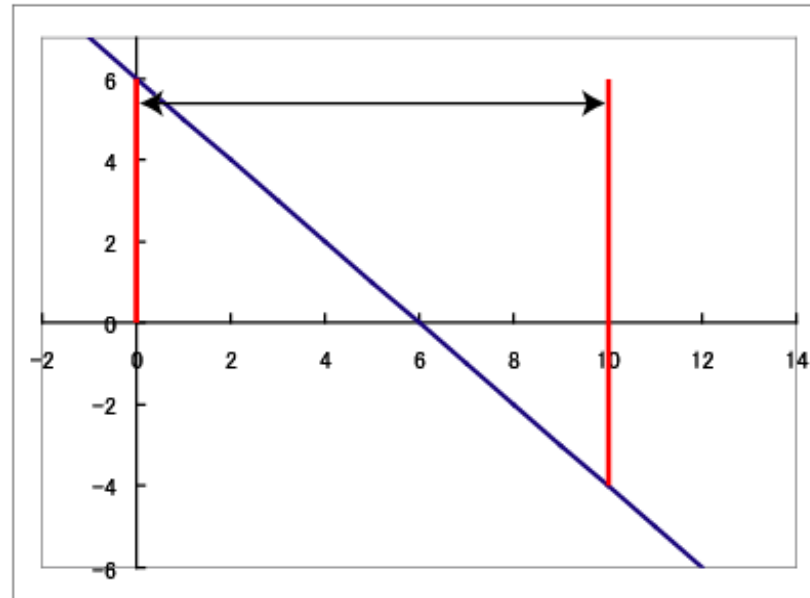
区間の2等分点をとって関数の値を計算



解の存在する区間を縮小し、解に近づけていく

2分法の手順(1)

- $y = -x + 6$ において $y = 0$ となる x を近似的に解く

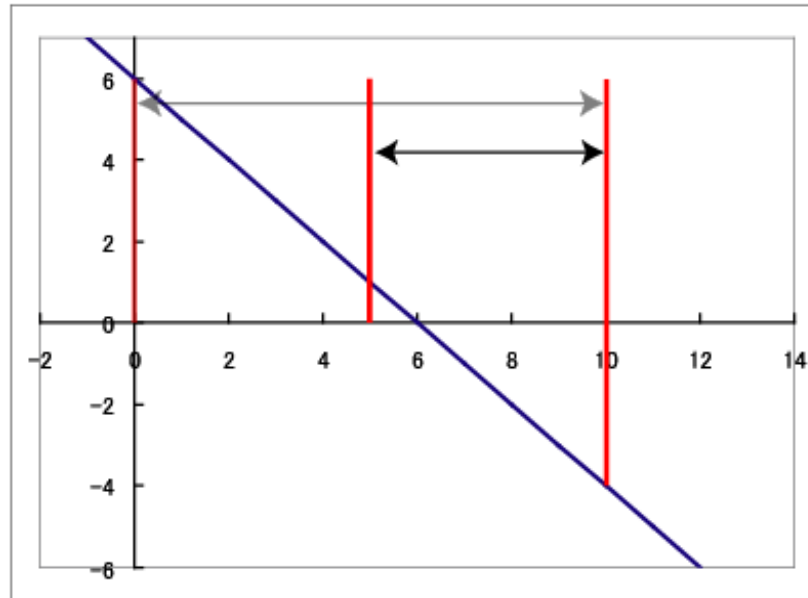


- グラフを描くと上のようになり、 $y = 0$ となるのは x 軸との交点
- x 軸との交点を挟む形で2点をとる ($y > 0$ となる x と $y < 0$ となる x の値を仮定する)

例えば $x = 0$ と $x = 10$ で挟む → 解は0から10の間にある

2分法の手順(2)

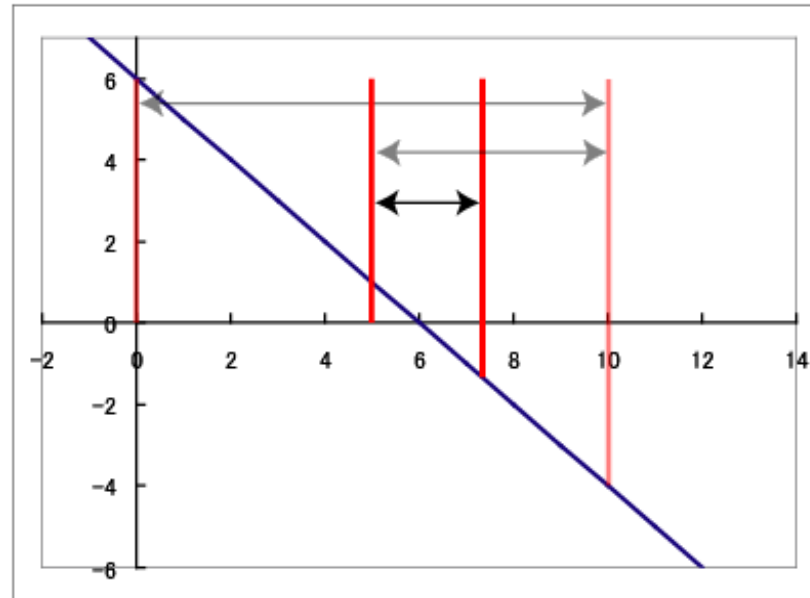
- 先ほどの区間 $(0, 10)$ の中点(2等分点)をとって y の値を計算する



- 中点は $x=5$ となり、このとき $y=1$ で正 → 解は5から10の間にある

2分法の手順(3)

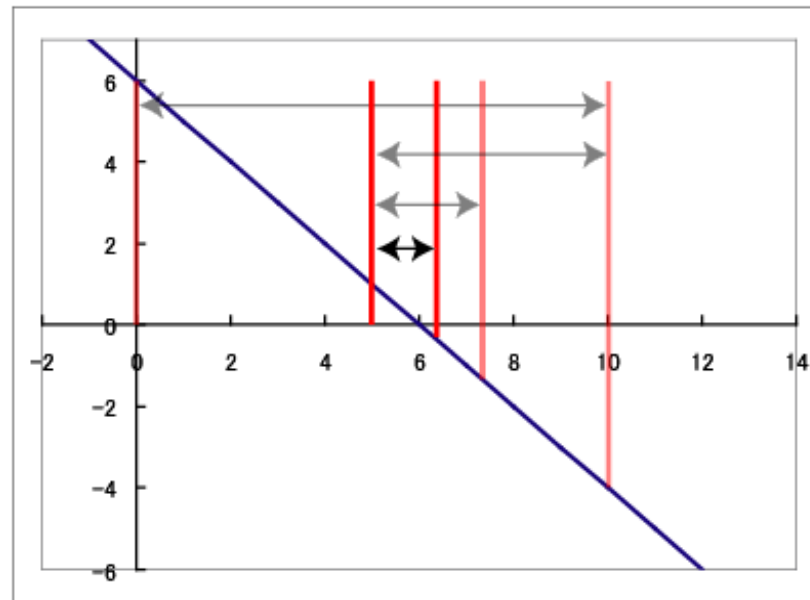
- 先ほどの区間 $(5, 10)$ の中点(2等分点)をとって y の値を計算する



- 中点は $x=7.5$ となり、このとき $y = -1.5$ で負 → 解は5から7.5の間にある

2分法の手順(3)

- 先ほどの区間 (5, 7.5) の中点 (2等分点) をとって y の値を計算する



- 中点は $x=6.25$ となり、このとき $y=-0.25$ で負 → 解は5から6.25の間にある

2分法の手順(4)

- この手順を繰り返していくと、1次方程式の解を近似的に解くことができる。
- 解の近似値を区間の中点とすると、10回繰り返した結果は以下のようになる。

回数	x1	x2	中点(解の近似値)
1	0	10	5
2	5	10	7.5
3	5	7.5	6.25
4	5	6.25	5.625
5	5.625	6.25	5.9375
6	5.9375	6.25	6.09375
7	5.9375	6.09375	6.015625
8	5.9375	6.015625	5.9765625
9	5.976563	6.015625	5.996094
10	5.996094	6.015625	6.0058595

練習

- 2分法を用いて、 $y = 2x - 7$ が 0 となる x の近似値を求めよ。
- ただし初期値は $(0, 10)$ からはじめ、5回繰り返すこと。
- ※ $y = 2x - 7$ は右上がりの直線だから、 x_1 のとき y が負、 x_2 で y が正になるようにする

回数	x_1	x_2	中点(解の近似値)
1	0	10	5
2			
3			
4			
5			近似解

練習の解答

- 以下のように計算できるので、解の近似値は 3.4375

回数	x1	x2	中点
1	0	10	5
2	0	5	2.5
3	2.5	5	3.75
4	2.5	3.75	3.125
5	3.125	3.75	3.4375

平均変化率による近似計算

- 前回の「携帯電話の利用者数」のシミュレーションのように、ある時間内の平均変化率が与えられている場合にはそれを用いて近似計算ができる。
- 平均変化率: 関数 $y = f(t)$ において t が t_1 から t_2 に変化するときの y の変化量 $f(t_2) - f(t_1)$ を、 t の変化量 $t_2 - t_1$ で割ったもの。

$$\text{平均変化率} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

携帯電話の利用者数増加のシミュレーション

■ シミュレーションモデルの内容

- 年の平均増加率が52%だから、ある年の翌年の利用者数は前年の1.52倍(ただし、1年の間の増加速度は一定と仮定)
- 実際は時々刻々と利用者が増えているので、増加速度も刻々と変化しているはず

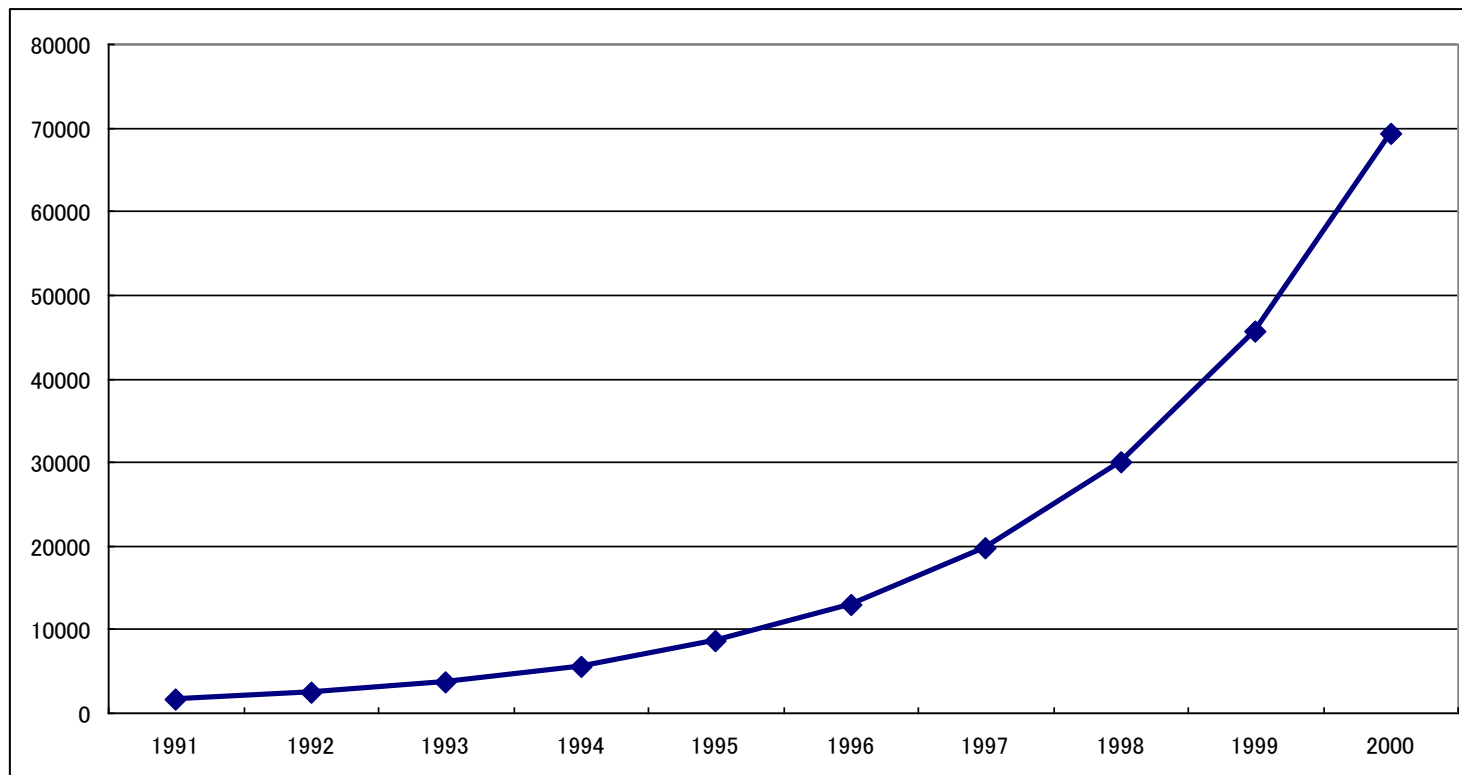
年度	利用者数(万人)
1991	1600
1992	2432
1993	3696.64

52%増加(1.52倍)

52%増加(1.52倍)

携帯電話の利用者数増加のシミュレーション(2)

- 1年ごとの携帯電話の利用者を計算し、グラフにする。
- 時間間隔(ここでは1年)の間は増加速度が一定と仮定。



平均変化率による近似計算

- 平均変化率が一定と仮定することで、変化後の値が近似的に計算できる。
- ただし、実際の変化率(変化の速度)が一定でない場合には誤差が生じる。
- 例: ロケットの高度を近似的に求める
 - あるロケットを打ち上げたときの高度は、打ち上げ後の時間(秒)の2乗の2倍となる。→ **実際の値**
 - あるロケットを打ち上げたときの高度は、時間間隔 $t_2 - t_1$ の区間内でつねに**平均変化率** $4t_1$ で上昇する。→ **近似値**

ロケットの高度を近似的に求める(2)

- 時刻 t のときの高度を $f(t)$ とすると、平均変化率が $4t_1$ だから高度は以下のように近似できる

$$\text{平均変化率} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = 4t_1$$

$$\therefore f(t_2) = f(t_1) + (t_2 - t_1) \times 4t_1$$

- 3秒後までの近似計算をすると以下のようなになる。
4-5秒後のロケットの高度を計算せよ。

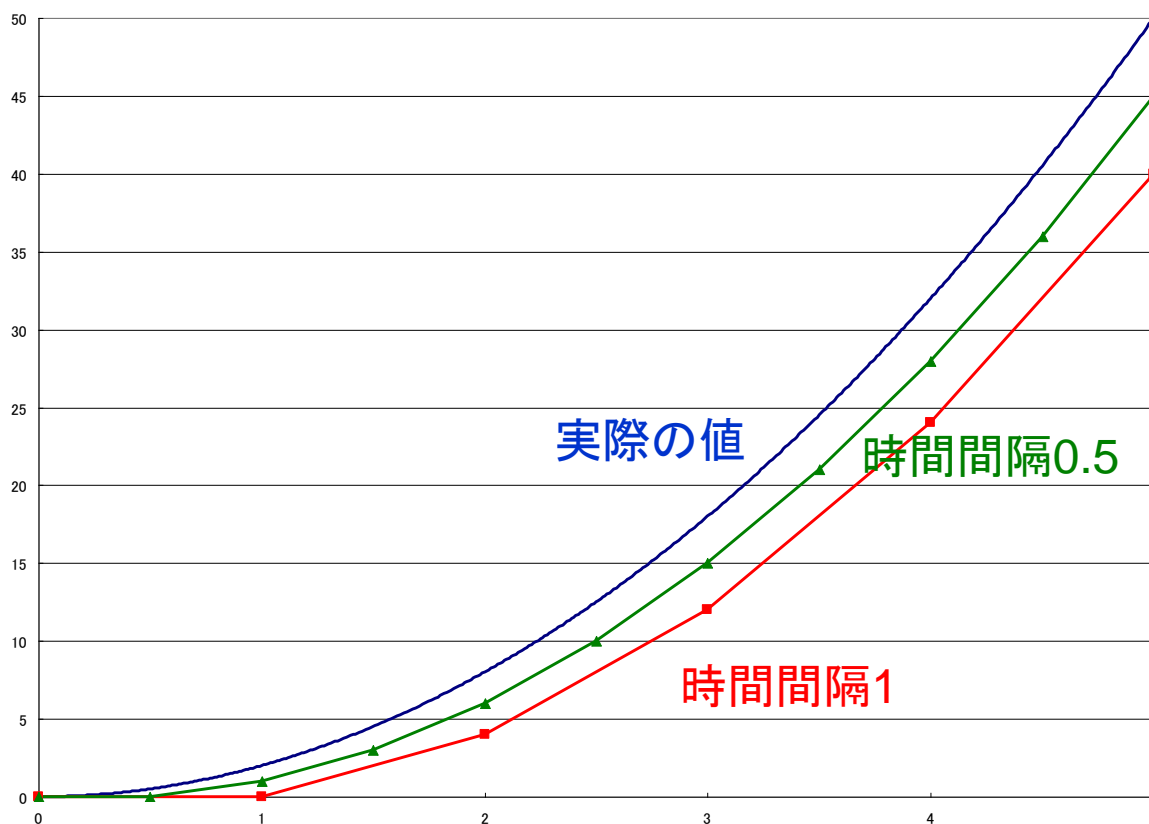
時刻	高度
0	0
1	0
2	4
3	12
4	$12+1 \times 4 \times 3=24$
5	$24+1 \times 4 \times 4=40$

Red arrows and formulas on the right side of the table indicate the calculation steps for the height at each time step:

- From 0 to 1: $0+1 \times 4 \times 0$
- From 1 to 2: $0+1 \times 4 \times 1$
- From 2 to 3: $4+1 \times 4 \times 2$

ロケットの高度を近似的に求める(2)

- 平均変化率を用いた近似計算では、ある区間内の変化が一定としているために実際の値とは誤差が生じる。
- 時間間隔を短くすることで、誤差を小さくすることができる。



差分方程式と微分方程式

- 平均変化率の時間間隔を Δt 、関数 $y = f(t)$ の変化を Δy とおくと、先ほどの平均変化率の式は

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = 4t$$

と書ける。このような関係式を差分方程式という。

- 差分方程式は**微分方程式の近似式**となっており、先ほどのようにある時点での平均変化率を用いて数値的に解く方法を「オイラー法」と呼ぶ。
- オイラー法は誤差が大きいので、精度が必要な場合には他にルンゲ・クッタ法と呼ばれる方法などがある。

乱数を用いたシミュレーション

- シミュレーションの対象となる事象が確率的な事柄を含む場合などには、乱数を用いたシミュレーションを用いることが多い。
- 以前の「つり銭モデル」も乱数を用いたシミュレーションの一つ。
- 乱数を用いたシミュレーションとして、「モンテカルロ法」と呼ばれるものがある。
- モンテカルロ法の代表例として、乱数を用いて円周率 π を求める方法を試してみよう。

モンテカルロ法で円周率を求める

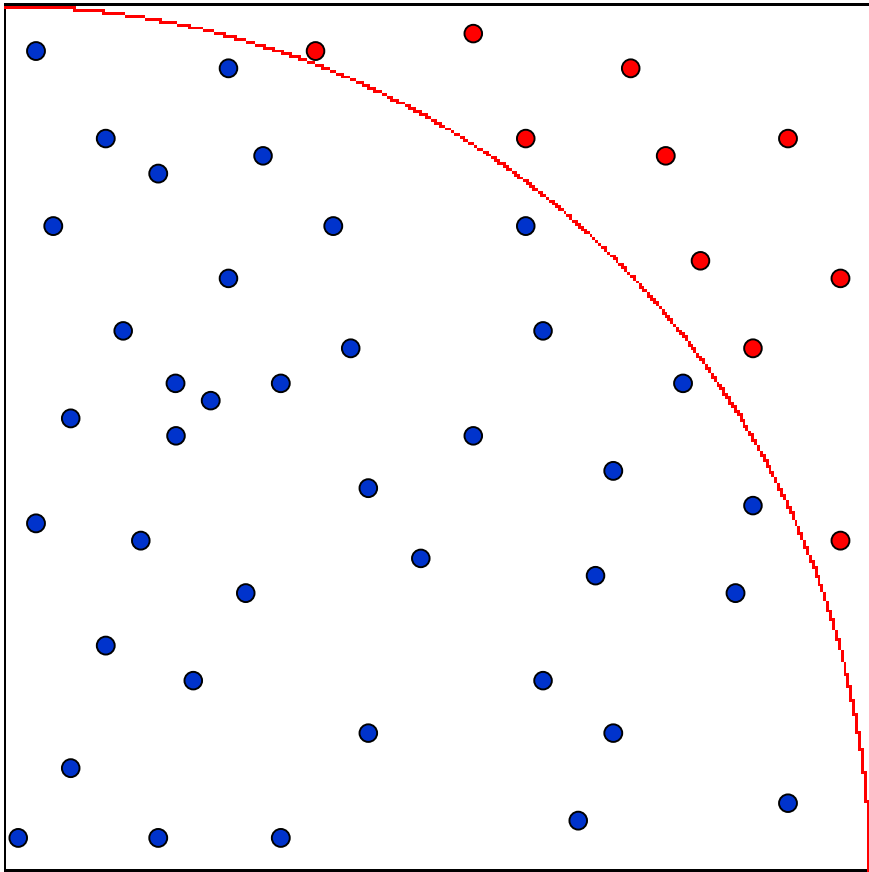
- 1辺の長さが1の正方形の中に接する半径1の1/4円(扇形)を描く。
- 正方形の中にランダムに点を打ち、正方形の中の点の数と1/4円内(扇形)の点の数を数える。
- 点がバラバラに撒かれているとすると、それぞれの点の数は正方形と1/4円(扇形)の面積に比例する
- 正方形の面積 = $1 \times 1 = 1$
- 1/4円(扇形)の面積 = $1 \times 1 \times \pi \div 4 = \pi / 4$

$$\frac{\text{扇形内の点の数}}{\text{正方形内の点の数}} = \frac{\pi / 4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \pi = 4 \times \frac{\text{扇形内の点の数}}{\text{正方形内の点の数}}$$

モンテカルロ法で円周率を求める(例)

- 例) 正方形の中に50個、扇形の中に40個の点がある場合



$$\pi \doteq 4 \times \frac{40}{50} = 3.2$$

この場合、 π の近似値は3.2となる

- 次回はノートパソコンを使用します。

しっかり充電したうえで持参してください
(ノートPCをお持ちでない場合はなくても構いません)