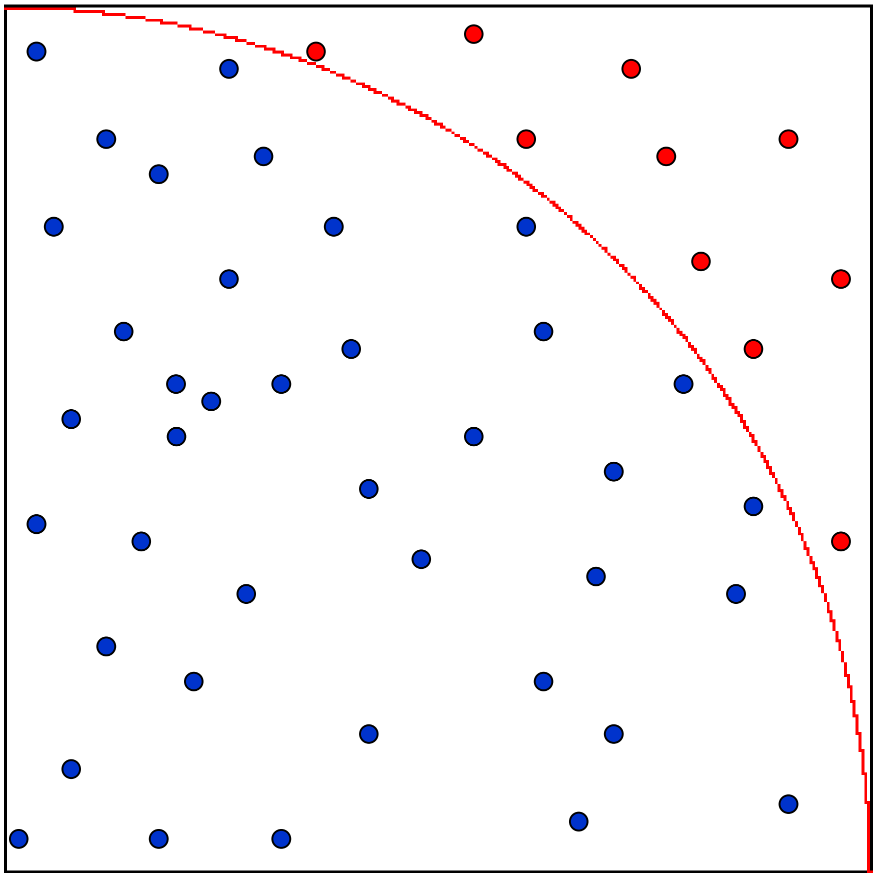
シミュレーション論Ⅰ

第５回

乱数の生成と利用

第４回のレポート解答例

- 例）正方形の中に50個、扇形の中に40個の点がある場合



$$\pi \fallingdotseq 4 \times \frac{40}{50} = 3.2$$

この場合、πの近似値は3.2となる

第4回のレポート解答例

- 例）点の数が以下のようになった場合、πの近似値は以下のように計算される

全体の点の数	円内の点の数	πの近似解
50	40	3.2
100	76	＝4×（76/100） ＝3.04
150	117	＝4×（117/150） ＝3.12

今回の内容

- 乱数を使ったシミュレーション手法「モンテカルロ法」について学んだ
- では、そもそも「乱数」って何？
- 乱数はどのようにして作られるの？
- 乱数の概要と基礎的な乱数生成法を学ぶ
- Excelにより乱数を用いたシミュレーションを作成する

乱数とは

- 乱数:でたらめな数字の集まり
  １. どの数字も他の数字と関係が無い
  ２. どの数字もある確率分布にしたがって出現する

- 例:サイコロの出目
  １. 出目の数は前に出た数字と無関係
  ２. どの数字も1/6の確率で出現する(正6面体のサイコロの場合)

乱数の利用

- 乱数は様々な状況で広く用いられている
- 確率的な過程を含む物理現象や社会現象のシミュレーション（モンテカルロ・シミュレーション）
- 標本の無作為抽出（アンケート調査や製品の品質検査など）
- 暗号の生成

など

乱数の生成

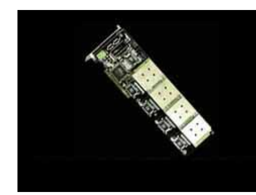
- 乱数を生成するには色々な方法がある
- サイコロ（乱数さい）を用いる
  - 正20面体のサイコロで、0～9の数字が各2ヶ所ずつ書かれている

- 乱数表を用いる
  - あらかじめ乱数が書き込まれた表で、どの場所から取り出していっても乱数が得られる

乱数表（例）

6	7	1	1	0	9	4	8
9	6	2	9	9	4	5	9
6	7	4	1	9	0	1	5
2	3	6	2	5	4	4	9

- 物理的過程を用いる
  - 原子核の崩壊やダイオードの電気的ノイズなどの確率的現象を用いる



- コンピュータを用いる（算術乱数）
  - アルゴリズムに従って乱数を計算する

  →プログラムから順番に作っているので、本当の意味での乱数ではない：擬似乱数

擬似乱数に必要な条件

- コンピュータで乱数を生成する場合に必要なことは？

- 長周期・・・同じ乱数の列がくりかえし出ないように
- 再現性・・・シミュレーションの結果を再現できるように
- 迅速性・・・シミュレーションに時間がかかりすぎないように
- 検定に耐えうる・・・本当に乱数としてみなせるかどうか

- 様々な擬似乱数の発生方法が提案されている

一様乱数の生成方法

- サイコロの出目のように、すべての数字が（ほぼ）同じ確率で出現する乱数を「一様乱数」という

- 一様乱数の生成方法には

平方採中法
合同法（乗積合同法、加法合同法、混合合同法）

などがある

平方採中法

- 適当な n ケタの数字を2乗(平方)し、中央の n ケタを取り出す方法(ケタ数が足りない場合は前に0をつける)

- 例:4ケタの乱数を作る

初期値を 4321 とし、2乗すると 18671041

4321	18671041
6710	45024100
0241	00058081
0580	00336400
3364	11316496
3164	・
・	・
・	・
・	

平方採中法の特徴

- 利点：
  - 簡単で分かりやすい、計算が単純で速い
- 欠点：
  - 0が出るとそれ以後の乱数が全て0になってしまう
  - 周期がよく分からない
- 分かりやすく有名なアルゴリズムであるが、現在はほとんど使われない

混合合同法

- 混合合同法

$$x_{n+1} \equiv a x_n + b \pmod{M}$$

- n+1番目の乱数は
  n番目の乱数に a をかけて b を足したものを
  M で割った余り

- a, b, M はすべて正の整数でなければならない

混合合同法による乱数の生成

初期値　4321、a=23、b=56、M=10000　とすると

$\boxed{4321} \times 23 + 56 = 99439 = 9 \times 10000 + 9439$

$\boxed{9439} \times 23 + 56 = 217153 = 21 \times 10000 + 7153$

$\boxed{7153} \times 23 + 56 = 164575 = 16 \times 10000 + 4575$

$\vdots$

- 乱数は M 以下の正の整数となるから、n ケタの乱数が必要なら M を10の n 乗とすればよい

混合合同法の特徴

- 利点:
  - 乱数の周期を最大にするための値の選び方が研究されている
- 欠点:
  - 係数の与え方によっては規則的な数字が現れたり、変なクセが現れる
  - 初期値が小さいと不規則でなくなる
- 対処法:
  - aは素数または5の奇数乗を選ぶ
  - 初期値は大きな値を選ぶ

参考:その他の合同法

- 乗積合同法

$$x_{n+1} \equiv a x_n \pmod{M}$$

- 加法合同法

$$x_{n+1} \equiv x_n + x_{n-k} \pmod{M}$$

- 混合合同法よりも簡単だが、その分欠点も多い

乱数を作ってみよう

- 平方採中法と混合合同法を用いて4ケタずつの乱数列を生成してみよう。

- 初期値はどちらも　1234　とする。
- 混合合同法での各係数は a=23、b=56、M=10000　とする
- それぞれ5回くりかえして乱数を生成してみよう

※ 平方採中法でケタ数が8ケタに満たない場合は、数字の前に0を追加して8ケタにし、中央の4ケタをとること

様々な分布関数

- 一様乱数だけでは様々な現象をシミュレーションできない
- 様々な分布にしたがう乱数を生成する必要がある
  - 任意の区間の一様乱数
  - 正規分布にしたがう乱数
  - ポアソン分布にしたがう乱数
  - 指数分布にしたがう乱数

  など
- 一様乱数以外についてはまた後日

乱数表を用いたシミュレーション

- 乱数表を用いてつり銭問題をシミュレーションしてみよう
- サークル会費1500円を1人ずつ支払う場合のつり銭の準備
- 各メンバーは
  - 1000円札+500円玉・・・確率0.2（20%）
  - 1000円札2枚・・・・・・・・確率0.4（40%）
  - 5000円札・・・・・・・・・・・確率0.3（30%）
  - 10000円札・・・・・・・・・・確率0.1（10%）

で支払うものと仮定する

乱数表をもちいたシミュレーション(2)

- 乱数表の1ケタの数字をそれぞれの場合にあてはめる
  - 1000円札+500円玉・・・確率0.2（20%）→乱数　0～1
  - 1000円札2枚・・・・・・・・・確率0.4（40%）→乱数　2～5
  - 5000円札・・・・・・・・・・・・・確率0.3（30%）→乱数　6～8
  - 10000円札・・・・・・・・・・・・確率0.1（10%）→乱数　9

  で支払うものと仮定する

- つり銭は5000円札、1000円札、500円玉を最小の枚数となるように組み合わせて支払う
  - 1000円札+500円玉・・・つり銭なし
  - 1000円札2枚・・・・・・・・・500円玉1枚
  - 5000円札・・・・・・・・・・・・・1000円札3枚＋500円玉1枚
  - 10000円札・・・・・・・・・・・・5000円札1枚+ 1000円札3枚＋500円玉1枚

乱数表の使い方

- 乱数表の適当な場所からスタートし、順に乱数を拾っていく

乱数表

8	2	6	9	4	1	0	1
9	8	5	3	3	8	7	7
9	6	3	6	2	1	0	8
7	8	4	1	2	1	9	1
4	4	5	8	3	4	1	7
6	6	0	4	6	3	4	1
7	7	5	1	8	3	3	3
1	4	0	4	2	3	8	6
1	6	2	3	4	4	3	7
8	1	3	2	7	1	5	8

- 8 3 4 1 7 6 6 0 ・・・　という乱数列が得られる

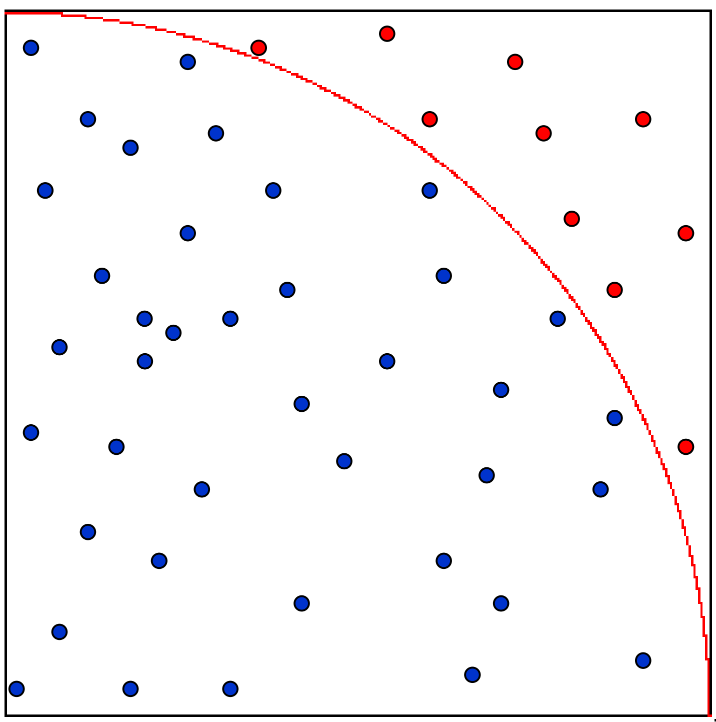
シミュレーション例

人数	乱数	支払い方法	500円玉	1000円札	5000円札	10000円札
1	8	5000円札	−1	−3	1	0
2	3	1000円×2	−2	−1	1	0
3	4	1000円×2	−3	1	1	0
4	1	1000円＋500円	−2	2	1	0
5	7	5000円札	−3	−1	2	0
6	6	5000円札	−4	−4	3	0
7	6	5000円札	−5	−7	4	0
8	0	1000円＋500円	−4	−6	4	0
9	4	1000円×2	−5	−4	4	0
10	6	5000円札	−6	−7	5	0

必要枚数			6	7	0	0

モンテカルロ法による円周率の近似計算

- モンテカルロ法による円周率の近似計算をExcelの乱数を用いて作成する



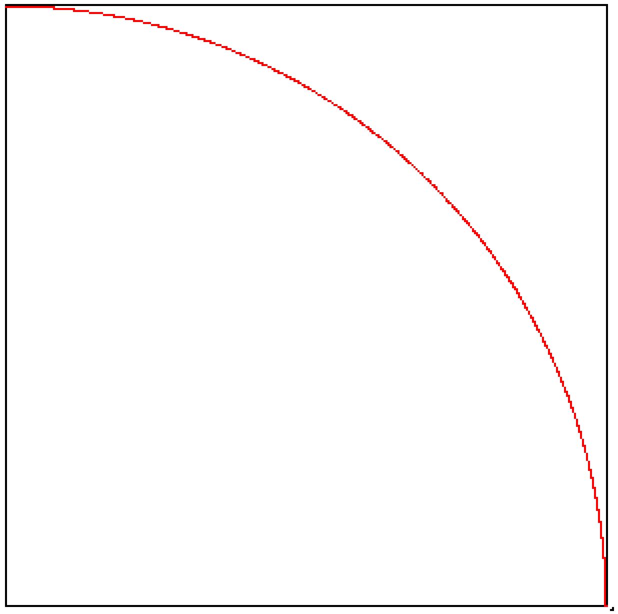
$$\frac{\text{扇形内の点の数}}{\text{正方形内の点の数}} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \pi = 4 \times \frac{\text{扇形内の点の数}}{\text{正方形内の点の数}}$$

ばらばらな点を作成するには？

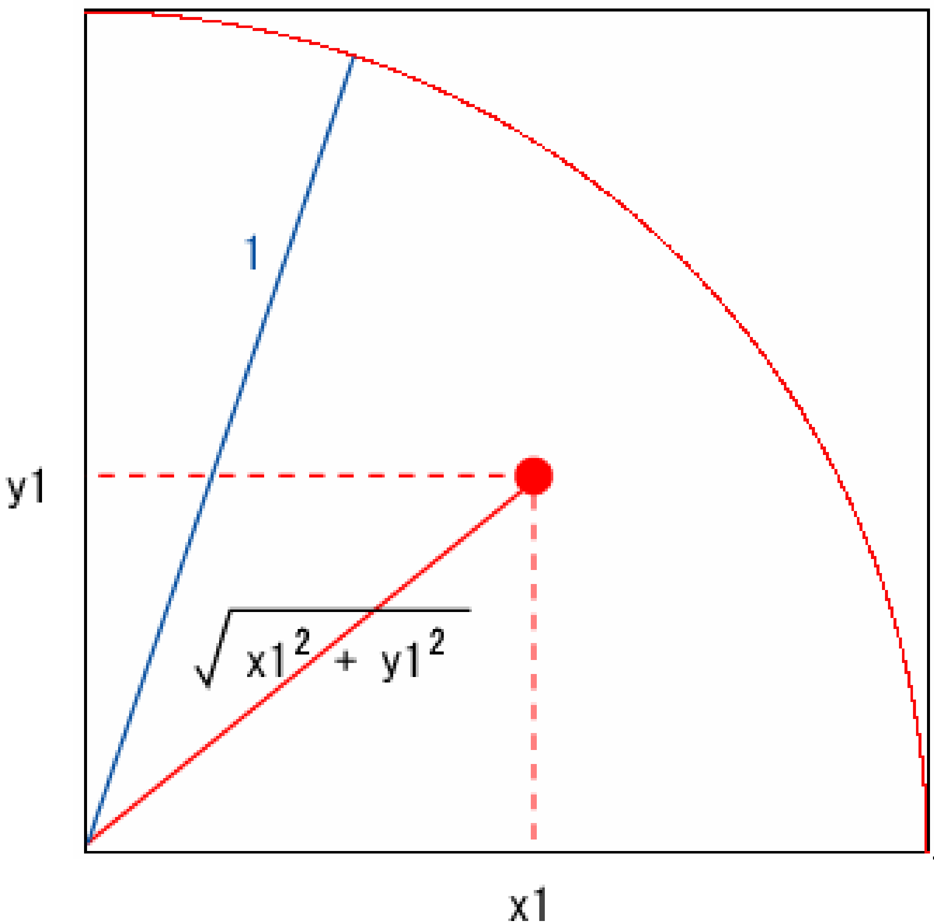
- RAND() 関数を使用して、x座標、y座標をそれぞれ0～1の間でランダムに決めてやればよい。

- では、その点が1/4円（扇形）の中に入っているかどうかはどうやって調べればいいだろうか？



扇形の中か外か判定するには？

- 原点からその点までの距離と、円の半径を比較してやればいい！



$$\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}} \leq 1$$

ならこの点は円内にある

x1、y1は正の値だから

$$\boxed{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} \leq 1}$$

Excelファイルの記述

- x, y の値をRAND関数で作成し、扇形の中にあるかどうかをIF関数で判定する（扇形内なら1、そうでなければ0とする）
- 書けたら下へ100行（個数が100になるまで）コピーする。

	A	B	C	D
1	個数	x	y	円内なら1
2	1	=RAND()	=RAND()	=IF(B2*B2+C2*C2<1,1,0)
3				

下へコピー

Excelファイルの記述

- F～H列を使って全体の点の数、扇形内の点の数、円周率（の近似値）を計算する。

- 以下は扇形内かどうかの判定値がD2～D101セルまで入っている場合
- 点の数＝100
- 円内の点の数＝D列の数値の合計
- 円周率＝４×（扇形内の点の数／全体の点の数）

E	F	G	H	I
	点の総数	円内の点の数	πの近似値	
	100	=SUM(D2:D101)	=4*(G2/F2)	

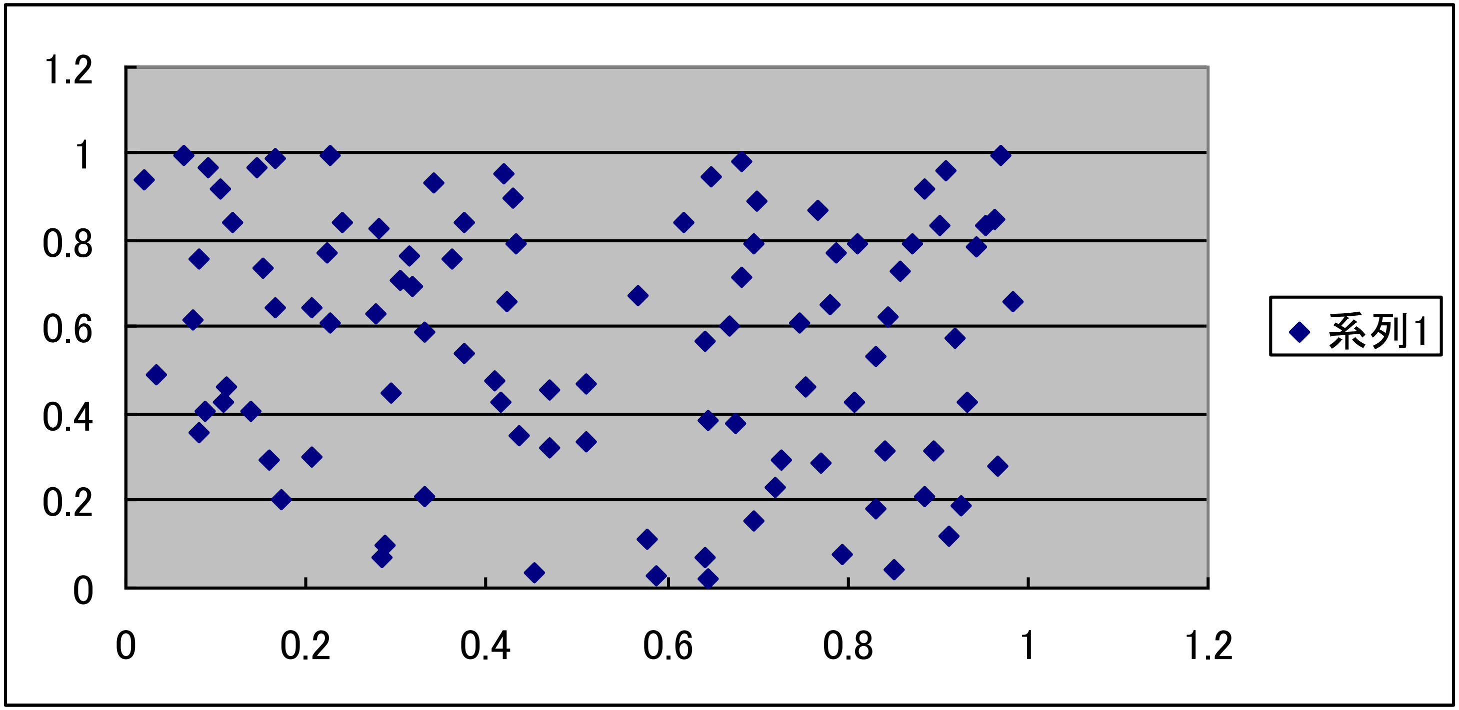
グラフの作成

- x,yの数値部分を選び、「散布図」のグラフを描く

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	個数	x	y	円内なら1		点の総数	円内の点の数	πの近似値	
2	1	0.483924	0.871293	1		100	88	3.52	
3	2	0.9147	0.368867	1					
4	3	0.369643	0.202701	1					
5	4	0.054023	0.014994	1					
6	5	0.166618	0.60214 5	1					
7	6	0.910601	0.649779	0					
8	7	0.029038	0.067303	1					
9	8	0.846568	0.013207	1					
10	9	0.912589	0.128038	1					
11	10	0.547319	0.412541	1					
12	11	0.827827	0.142571	1					
13	12	0.531887	0.41343	1					
14	13	0.626433	0.672073	1					
15	14	0.171071	0.82106	1					
16	15	0.326746	0.316579	1					
17	16	0.013377	0.717022	1					
18	17	0.511487	0.619046	1					
19	18	0.232756	0.084686	1					
20	19	0.185759	0.582512	1					
21	20	0.162842	0.227018	1					
22	21	0.011426	0.148571	1					
23	22	0.474435	0.228827	1					
24	23	0.718281	0.063281	1					
25	24	0.900034	0.950431	0					
26	25	0.469041	0.407095	1					
27	26	0.176122	0.695688	1					

グラフの作成(2)

- 以下のようなグラフが描ける
- 続いて、扇形のグラフも作成して合成する



扇形のグラフの作成

- 扇形(1/4円)の方程式は $y = \sqrt{1 - x^2}$ となる。
- Excelで平方根を計算するには ＝SQRT(数値) を用いる。
- グラフは細かい方がいいので、xは0.01刻みで0～1まで作成する。

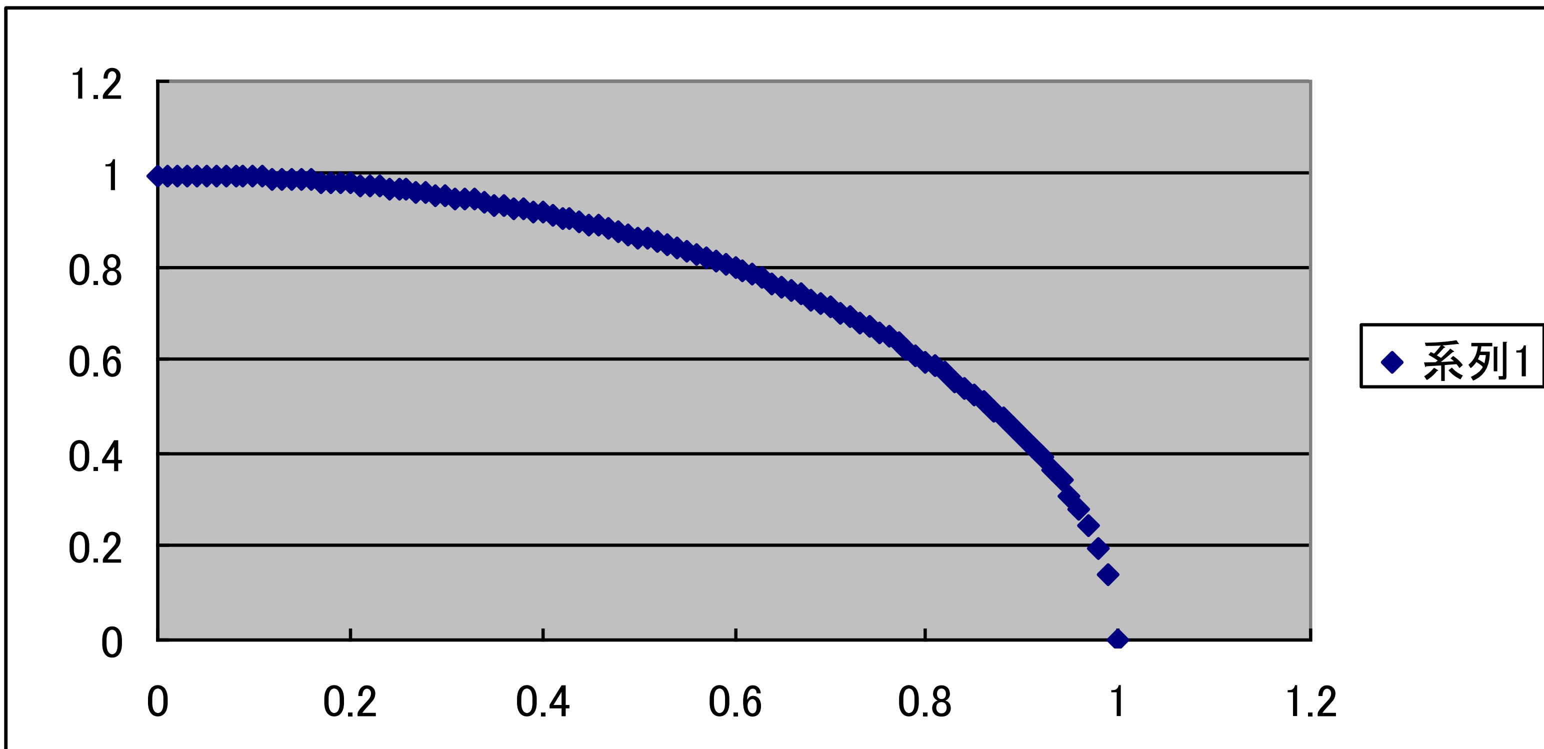
I	J	K
	x	y
	0	=SQRT(1-J2*J2)
	0.01	
	0.02	
	0.03	
	0.04	
	0.05	
	0.06	
	0.07	
	0.08	

x=1まで作成

下へコピー

扇形のグラフの作成(2)

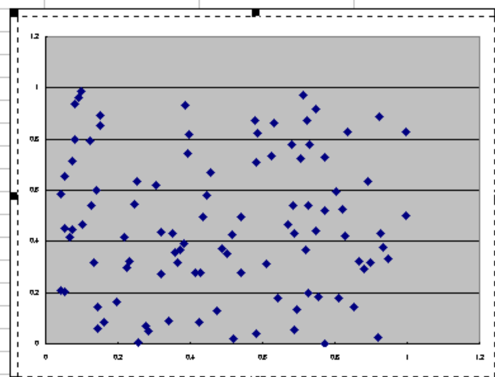
- 先ほどと同様にx, y の値を選び、散布図でグラフを描く。
- この時点ではグラフは線でなく点のままでよい。

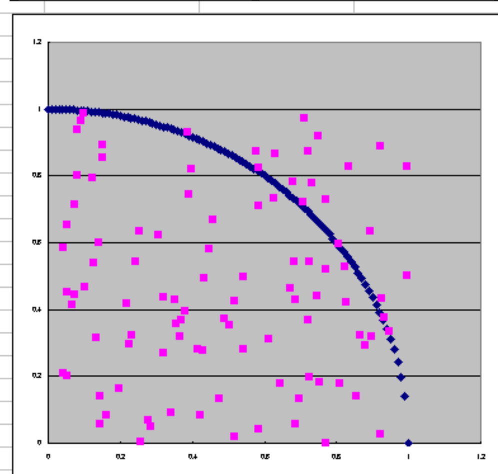


グラフの合成

- できたら、2つのグラフのうちどちらかをコピーしてもう片方に貼り付ける。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	個数	x	y	円内なら1		点の総数	円内の点の数	πの近似値		x	y	
2	1	0.278828	0.067127	1		100	80	3.2		0	1	
3	2	0.041435	0.584808	1						0.01	0.999949999	
4	3	0.771916	0.519445	1						0.02	0.99979998	
5	4	0.415147	0.279921	1						0.03	0.999549899	
6	5	0.946379	0.332659	0						0.04	0.99919968	
7	6	0.054269	0.201235	1						0.05	0.998749218	
8	7	0.687638	0.429022	1						0.06	0.998198377	
9	8	0.754219	0.18145	1						0.07	0.997546991	
10	9	0.073071	0.715537	1						0.08	0.996794864	
11	10	0.722134	0.873065	0						0.09	0.995941765	
12	11	0.445411	0.58156	1						0.1	0.994987437	
13	12	0.933061	0.37532	0						0.11	0.993931587	
14	13	0.427724	0.275892	1						[illegible]	0.992773892	
15	14	0.196101	0.164474	1						[illegible]	0.991513994	
16	15	0.217265	0.418522	1						[illegible]	0.990151504	
17	16	0.611746	0.313241	1						[illegible]	[illegible]988685997	
18	17	0.710787	0.97205	0						0.1[illegible]	[illegible]87117014	
19	18	0.503313	0.351562	1						0.17	[illegible]5444062	
20	19	0.642369	0.177858	1						0.18	[illegible]8366661	
21	20	0.457821	0.66939	1						0.19	[illegible]8178409	
22	21	0.139646	0.600527	1						0.2	0.[illegible]9795897	
23	22	0.079894	0.937487	1						0.21	[illegible]7701386	
24	23	0.340863	0.090354	1						0.22	[illegible]5499872	
25	24	0.725	0.542118	1						0.23	[illegible]73190629	
26	25	0.805219	0.595746	0						[illegible]	[illegible]970772888	
27	26	0.770721	0.001056	1						[illegible]	0.968245837	
28	27	0.58327	0.708928	1						[illegible]	0.965608616	
29	28	0.160828	0.085211	1						[illegible]	0.962860322	
30	29	0.079265	0.799746	1						0.28	0.96	
31	30	0.143314	0.057956	1						0.29	0.957026645	
32	31	0.835133	0.828118	0						0.3	0.953939201	
33	32	0.371165	0.36845	1						0.31	0.950736557	
34	33	0.540314	0.495627	1						0.32	0.947417543	
35	34	0.284615	0.048892	1						0.33	0.943980932	
36	35	0.365509	0.318522	1						0.34	0.940425436	
37	36	0.518766	0.019795	1						0.35	0.9367497	
38	37	0.380756	0.394136	1						0.36	0.932952303	
39	38	0.225626	0.296458	1						0.37	0.929031754	
40	39	0.253941	0.633516	1						0.38	0.924986486	
41	40	0.746248	0.439045	1						0.39	0.920814857	
42	41	0.30509	0.62148	1						0.4	0.916515139	





シミュレーションの完成

- x軸、y軸の目盛を0～1に変更し、扇形のデータを点から線にする（円の部分をダブルクリックし、マーカーを「なし」、線を「指定」する）。
- F9キーを押すと乱数の値が変わって何度も計算できる。