

シミュレーション論 I

第10回

様々なシミュレーション: 金利とローン返済

第9回のレポート

- 新聞売り子問題のシミュレーションをおこない、最も利益の高かった発注部数を調べて記入するとともに、**その理由**を考えて記入せよ。
- ポイント:ポアソン乱数表を用いて10日分のシミュレーションをおこない、仕入部数(8、10、12)ごとに総売り上げを計算する→最も高かったものを記入し、なぜそうなったのか仕入価格、販売価格、客数の関係などから考察する。

第9回のレポート 回答例

日数	乱数	利益(8部仕入)	利益(10部仕入)	利益(12部仕入)
1	8	320	160	0
2	9	320	280	120
3	6	80	-80	-240
4	13	320	400	480
5	13	320	400	480
6	13	320	400	480
7	16	320	400	480
8	13	320	400	480
9	6	80	-80	-240
10	11	320	400	360
総利益		2720	2680	2400

- ポアソン乱数表を用いて日々の客数を記入し、売り上げを計算する
- 上の例では「8部仕入れ」の場合に総利益がもっとも高くなった

第9回のレポート 回答例

■ 「8部仕入れ」の場合に総利益がもっとも高くなった理由

・・・仕入れ価格が80、販売価格が120であることから一部販売したときの 利益に比べて売れ残った場合の損失が大きい。このため、売れ残りが出ないよう客数の平均より少なめに仕入れることで利益が大きくなったと考えられる

※「10部仕入れ」で最高益になった場合は「客数の平均に合わせてすることで無駄なく販売できたため」、

「12部仕入れ」で最高益になった場合は「客数が増えても逃さずに多く販売できたため」などが理由として考えられる

今回の内容

- 数式によって厳密に定義され、かつ解析的に解ける問題のシミュレーションについて考える
- 金利計算とローン返済のモデルを通じて、確定的なシミュレーションの意義を知る
- Excelを用いて前回の新聞売り子問題のシミュレーションをおこなう

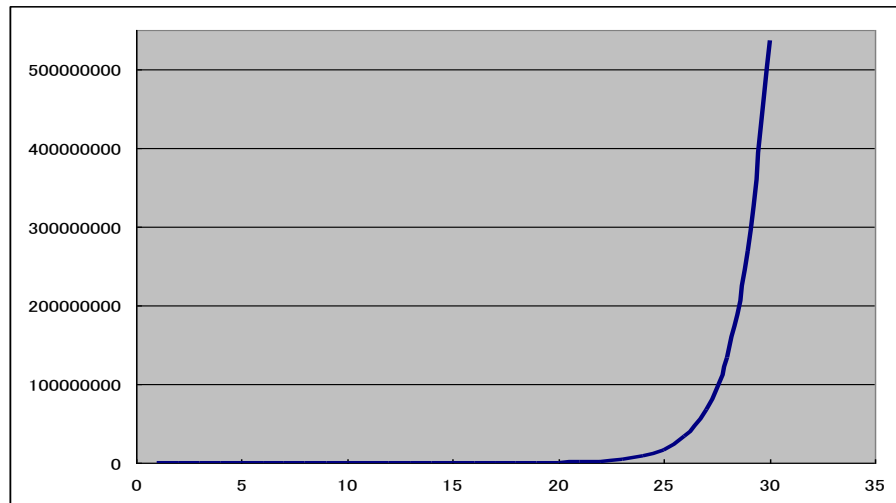
雑学：曾呂利新左衛門の褒美

- 昔、羽柴秀吉の家臣（御伽衆）に曾呂利新左衛門という男がいました。ある日、将棋に負けた秀吉が褒美の希望を聞いたところ、
「今日は米1粒、明日は2粒、翌日はその倍の4粒、その翌日は8粒というように30日間いただきたい」と答えたということです。さて、30日後に秀吉は何粒の米を与えることになったのでしょうか？



雑学：曾呂利新左衛門の褒美(2)

- 1日目・1粒が10日目には512粒、20日目には524,288粒となり約15kg、22日目には2,097,152粒で米俵60kg・1俵分となる。
- 30日目には、何と536,870,912粒・米俵256俵(100石の殿様)にもなる。
- 解析的に解くにはどうすればいいか考えてみよう。



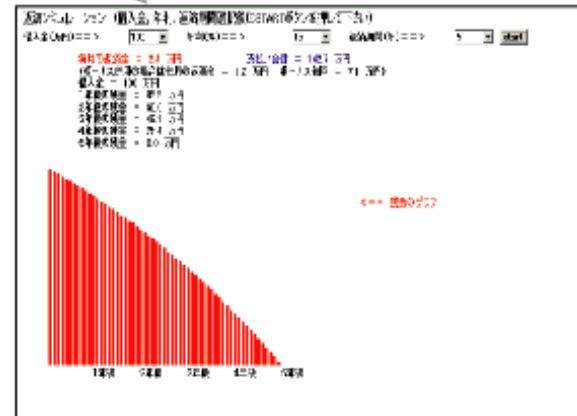
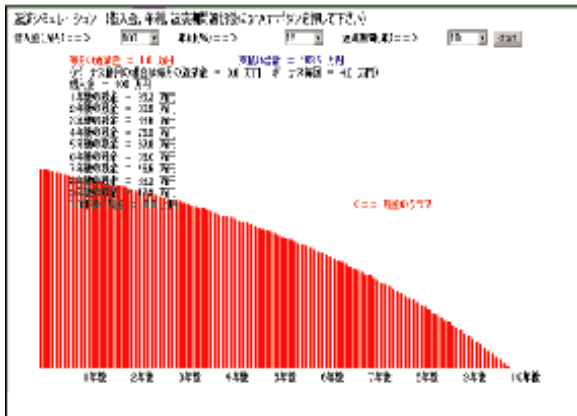
確定的なモデルのシミュレーション

- 数式によって厳密に定義され、かつ解析的に解ける問題のシミュレーションは無意味だろうか？
- 先ほどの例のように、モデル、数式が分かっているにもかかわらず「数式だけでは分かりにくい」、「単純な予想を超える」、「様々な場合を比較したい」場合など、シミュレーションをおこなうことにより理解を助けることができる。
- 身近なところでは、金利の計算（利子・利息）やローン返済額、年金額のシミュレーションなどが見受けられる。

単純な数値計算としてのシミュレーション

- 例: ローン返済のシミュレーション
- 銀行などからお金を借りるとして、どのような返済方法がよいか？

金額(いくら借りるか?)
利率(利息はどうなるか?)
返済期間(どれくらいで返すか?)
etc...



- 様々な場合をあらかじめ試したり、分かりやすく相手に示したりできる。

金利と残高

- 金利の計算方法には大きく分けて「単利」と「複利」がある。
- **単利**: 最初に預けられた(借りた)元金に対してのみ利息を計算する方法
- **複利**: 一定期間の利息を元金に加え、その合計を新たな元金として利息を計算する方法

単利

- 単利の元利合計:

$$\text{元利合計} = \text{元本} \times (1 + \text{年利率} \times \text{預入年数})$$

例) 1万円を年利率1%の単利で預金したとすると

$$1\text{年後}: 10,000 \times (1 + 0.01 \times 1) = 10,100$$

$$2\text{年後}: 10,000 \times (1 + 0.01 \times 2) = 10,200$$

$$3\text{年後}: 10,000 \times (1 + 0.01 \times 3) = 10,300$$

...

※利息は元本の1万円についてのみ計算される
＝毎年同じ利息がつく

※単利の元利合計は等差数列になる

複利

- 複利の元利合計： $\text{元利合計} = \text{元本} \times (1 + \text{利率})^{\text{預入期間}}$

- 複利の利率と預入期間：

1年複利→利率は**年利率**、預入期間は**1年を1期間**とする。

半年複利→利率は(**年利率**÷**2**)、預入期間は**半年を1期間**とする。(1年は2期間)

1ヶ月複利→利率は(**年利率**÷**12**)、預入期間は**1ヶ月を1期間**とする。(1年は12期間)

複利(2)

例) 1万円を年利率 2%の半年複利で預金したとすると

$$\text{半年あたりの利率} = 2 \div 2 = 1 (\%)$$

$$\text{半年後: } 10,000 \times (1+0.01)^1 = 10,100$$

$$\text{1年後: } 10,000 \times (1+0.01)^2 = 10,201$$

$$\text{1年半後: } 10,000 \times (1+0.01)^3 = 10,303$$

...

※利息は一定期間ごとに(元本+利息)を新たな元本として
計算される=利息が期間ごとに増えていく

※複利の元利合計は**等比数列**になる

例：単利と複利の比較

- 年利率5%の単利と1年複利で10万円を銀行に預けた場合、5年後までの毎年の利息と元利合計を計算してみよう。
- 単利、複利それぞれの元利合計を X_T , X_F とし、年数を n とすると

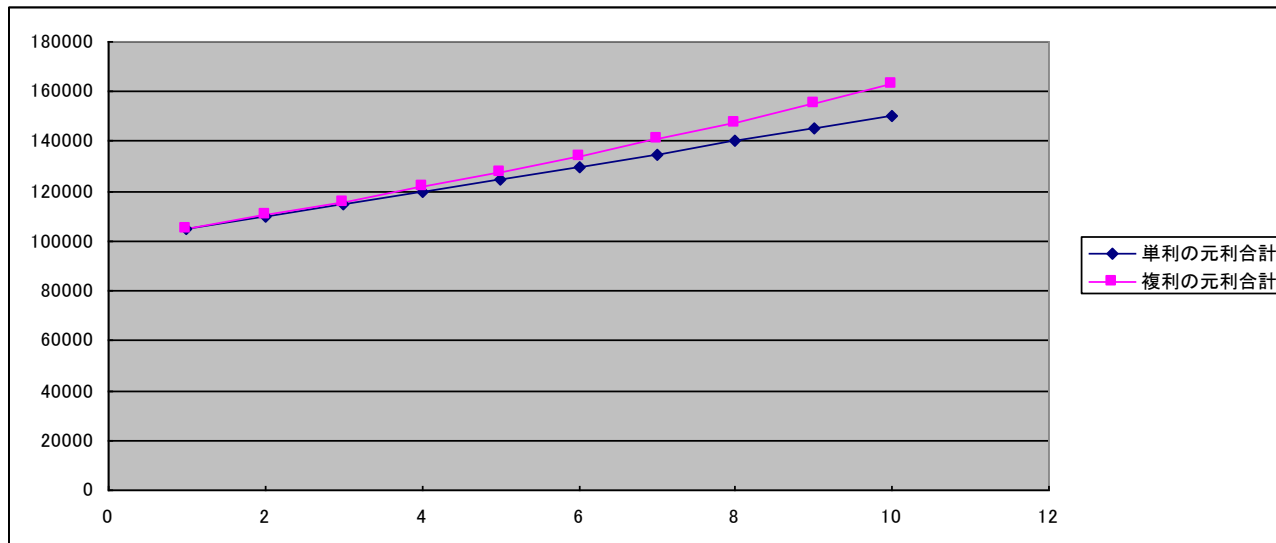
$$X_T = 100000 \times (1 + 0.05 \times n)$$

$$X_F = 100000 \times (1 + 0.05)^n$$

例：単利と複利の比較

年数	単利の利息	単利の元利合計	複利の利息	複利の元利合計
1	5000	105000	¥5,000	¥105,000
2	5000	110000	¥5,250	¥110,250
3	5000	115000	¥5,513	¥115,763
4	5000	120000	¥5,788	¥121,551
5	5000	125000	¥6,078	¥127,628

- Excelで計算して10年後までの結果をグラフにすると



例：複利の比較

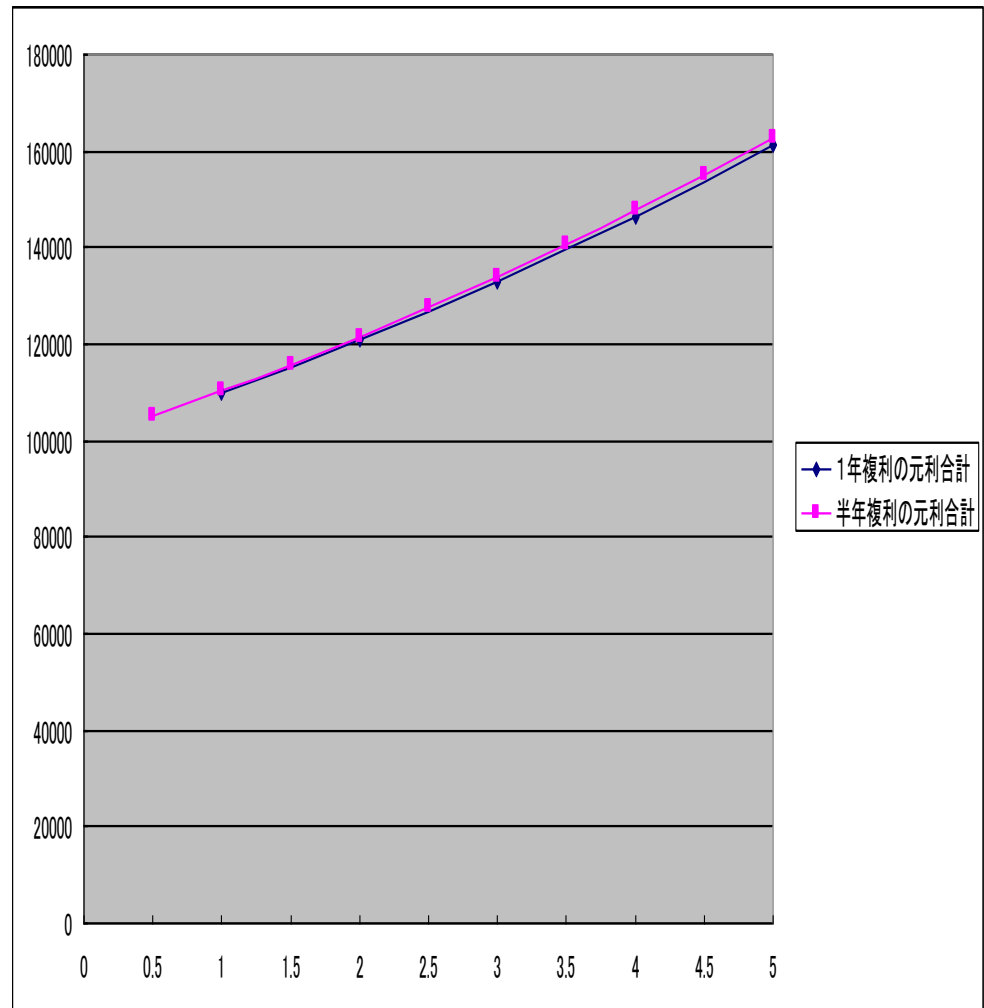
- 年利率10%の複利で10万円を銀行に預ける。1年複利と半年複利の場合について5年後まで計算してみよう。
- 1年複利、半年複利それぞれの元利合計を X_1 , $X_{0.5}$ とし、年数を n 、半年の期間を m とすると

$$X_1 = 100000 \times (1 + 0.1)^n$$

$$X_{0.5} = 100000 \times (1 + 0.05)^m$$

例：複利の比較

年数	1年複利の元利合計	半年の期間数	半年複利の元利合計
		1	¥105,000
1	110000	2 = 1年	¥110,250
		3	¥115,763
2	121000	4 = 2年	¥121,551
		5	¥127,628
3	133100	6 = 3年	¥134,010
		7	¥140,710
4	146410	8 = 4年	¥147,746
		9	¥155,133
5	161051	10 = 5年	¥162,889



ローン返済：元利均等返済

- 元利均等返済方式：
毎回の返済額（元金，利息の合計）を均等にした返済方式。
ローンで最も普及した返済方式で、裁判所の調停では一般にこの返済方式が用いられている。

$$\text{毎回の返済額} = \frac{\text{借入金額} \times \text{利率} \times (1 + \text{利率})^{\text{返済回数}}}{(1 + \text{利率})^{\text{返済回数}} - 1}$$

元利均等返済のシミュレーション

- 10万円を年利12%の1ヶ月複利(つまり月1%の複利)で借り入れ、元利均等返済をする。
- 6ヶ月で返す場合と12ヶ月で返す場合のそれぞれについて、毎回の返済金額を計算せよ。
- Excelで以下のように入力すると、6回(6ヶ月)で返済する場合の毎回の返済額が分かる(実際の額は小数点以下を切り捨てる)。
- 返済回数を変えて12回で返済する場合についても試してみよう。

	A	B
1	借り入れ金額	利率(1ヶ月)
2	100000	0.01
3	返済回数	毎回の返済額
4	6	$=(A2*B2*(1+B2)^{A4})/((1+B2)^{A4}-1)$
5		

参考: 小数点以下の切捨て

- Excelで小数点以下を切り捨てて整数にするには、=INT() 関数を用いる
- 先程の「毎回の返済額」の数式を =INT() のカッコ内に入れてやるとよい

	A	B
1	借入れ金額	利率(1ヶ月)
2	100000	0.01
3	返済回数	毎回の返済額
4	6	=INT((A2*B2*(1+B2)^A4)/((1+B2)^A4-1))
5		

新聞売り子問題のシミュレーション

- ポアソン分布に従う乱数値をその日の客数、仕入部数を1～20部として新聞売り子問題のシミュレーションを行う。
- 10日分のシミュレーションを繰り返しおこない、最も平均利益の高かった仕入部数を調べる。

仕入れ価格

$$c = 80$$

販売価格

$$a = 120$$

1日の客数

x (乱数表から決定)

仕入量

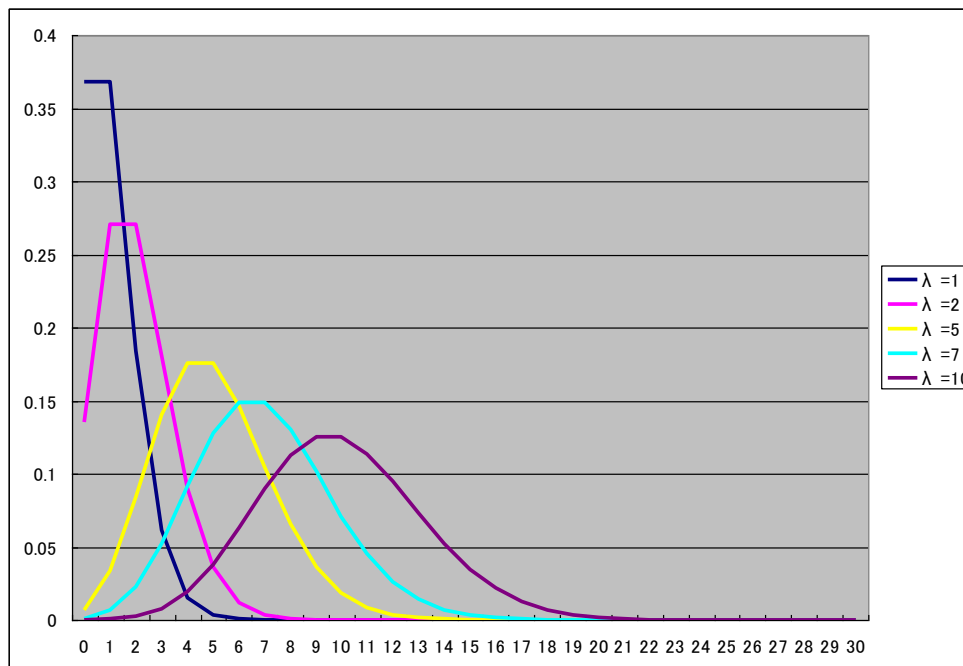
y (1部～20部)

1日の利益

$$f(x, y) = \begin{cases} xa - yc & (x \leq y \text{ のとき}) \\ y(a - c) & (x \geq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

ポアソン乱数の近似

- Excelでポアソン分布に従う乱数(ポアソン乱数)を生成するのは結構面倒(VBAマクロやポアソン分布の表から作成する方法がある)
- 平均値 λ が比較的大きい場合、正規分布によってポアソン分布の近似ができる(平均値 λ 、標準偏差を $\sqrt{\lambda}$ とする)



乱数の生成と客数の決定

- 以下のような表を作成し、正規乱数でポアソン乱数を近似する(平均 λ 、標準偏差は λ の平方根)。
- まれに負の値が出るので、MAX関数とINT関数を使って0以上の整数値に直す。

	A	B	C
1	日数	乱数	客数
2	1	<u>=NORMINV(RAND(),10,SQRT(10))</u>	<u>=MAX(INT(B2),0)</u>
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		
12			

できたら下へコピー

仕入れ部数の設定

- 仕入れ部数を1～20部としてシミュレーションするための枠を作成する
- D1～W1まで、1～20の数値を入れる
- 12行目に利益の合計を計算する欄を作成しておく

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	日数	乱数	客数	1	2	3	4	5
2	1	6.374423077	6					
3	2	11.58900174	11					
4	3	9.855550245	9					
5	4	2.264586358	2					
6	5	10.58819226	10					
7	6	10.33677675	10					
8	7	6.209735513	6					
9	8	14.29399857	14					
10	9	9.614818641	9					
11	10	7.868926941	7					
12								
13								

• •

[illegible]

利益の計算

- IF関数を使って、その日の客数と仕入れ部数から利益を算出する
- 客数 < 仕入れ部数・・・客数 × 120 − 仕入れ部数 × 80
- 客数 ≥ 仕入れ部数・・・仕入れ部数 × (120 − 80)

C	D
客数	1
6	=IF(\$C2<D\$1,\$C2*120-D\$1*80,D\$1*(120-80))

- 入力できたら横・縦へコピーして10日分のシミュレーションを完成させる

総利益の計算

- SUM関数を使って、仕入れ部数ごとの総利益を計算する
- 入力できたら右へ(W列まで)コピーしておく

C	D	E	F	
客数	1	2	3	
11	40	80	120	
8	40	80	120	
11	40	80	120	
6	40	80	120	
14	40	80	120	
8	40	80	120	
8	40	80	120	
7	40	80	120	
7	40	80	120	
5	40	80	120	
	=SUM(D2:D11)			

集計部分の作成(1)

- 14～15行に繰り返し回数・総利益の合計・総利益の平均を記入する欄を作成する

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	日数	乱数	客数	1	2	3	4	5
2	1	10.18330347	10	40	80	120	160	200
3	2	7.169626972	7	40	80	120	160	200
4	3	8.597361914	8	40	80	120	160	200
5	4	9.111955311	9	40	80	120	160	200
6	5	7.280688993	7	40	80	120	160	200
7	6	8.416045095	8	40	80	120	160	200
8	7	4.45012418	4	40	80	120	160	80
9	8	9.931893087	9	40	80	120	160	200
10	9	10.66116643	10	40	80	120	160	200
11	10	7.874575486	7	40	80	120	160	200
12				400	800	1200	1600	1880
13								
14	繰り返し回数		利益合計					
15			利益平均					
16								

...

R	S	T	U	V	W
15	16	17	18	19	20
0	-80	-160	-240	-320	-400
-360	-440	-520	-600	-680	-760
-240	-320	-400	-480	-560	-640
-120	-200	-280	-360	-440	-520
-360	-440	-520	-600	-680	-760
-240	-320	-400	-480	-560	-640
-720	-800	-880	-960	-1040	-1120
-120	-200	-280	-360	-440	-520
0	-80	-160	-240	-320	-400
-360	-440	-520	-600	-680	-760
-2520	-3320	-4120	-4920	-5720	-6520

集計部分の作成(2)

- 繰り返し回数、総利益の合計、総利益の平均を計算する
- 循環参照のエラーが出るが、キャンセルを押すこと

13					
14	繰り返し回数	=B14+1	利益合計	=D14+D12	
15			利益平均	=D14/\$B14	
16					

- 入力できたら、総利益の合計と平均について右へコピーしておく

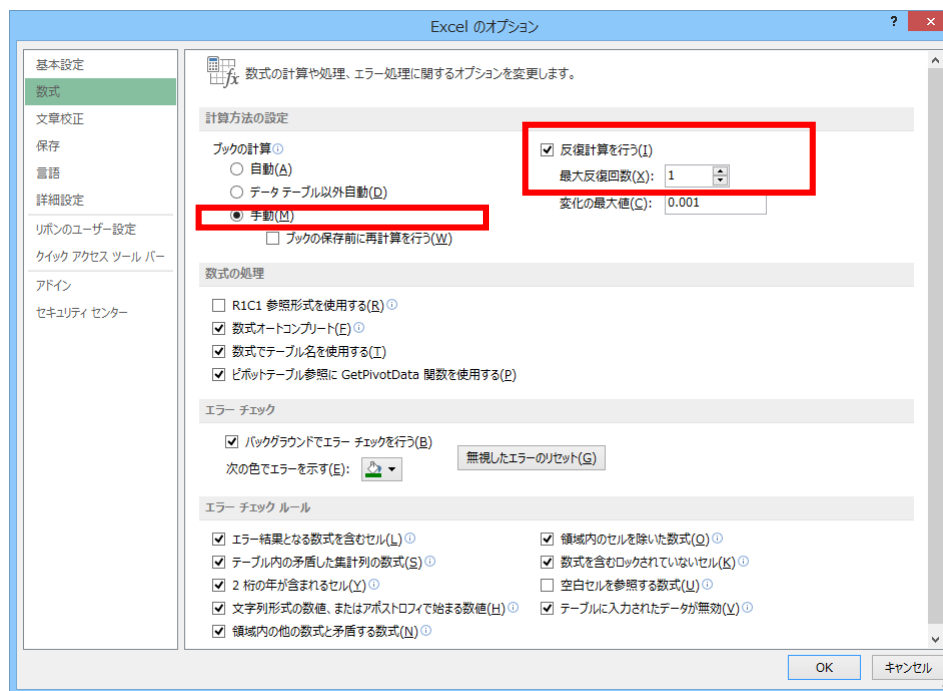
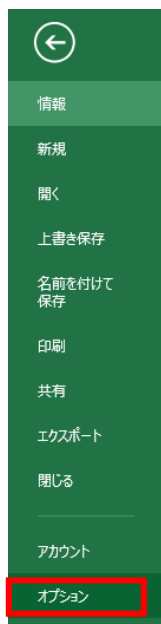
グラフの作成

- 循環参照を許可する前に、グラフを作成しておく
- 総利益の平均値を1～20部まで選択し、「挿入」タブから縦棒グラフを作成する
- まだ数値が入っていないので棒が出ないが構わない



循環参照の許可

- 循環参照を許可して繰り返し計算ができるようにする
- 「ファイル」メニューから「オプション」を選び、「数式」タブから計算方法を「手動」、「反復計算を行う」にチェックを入れて「最大反復回数」を「1」にする



完成

- F9キーを押して繰り返し計算を試みよう
- 仕入れ部数によって総利益(の平均)がどのように異なるかが分かる

