シミュレーション論 Ⅱ

第3回

モデル化の基礎数理

第2回のレポート

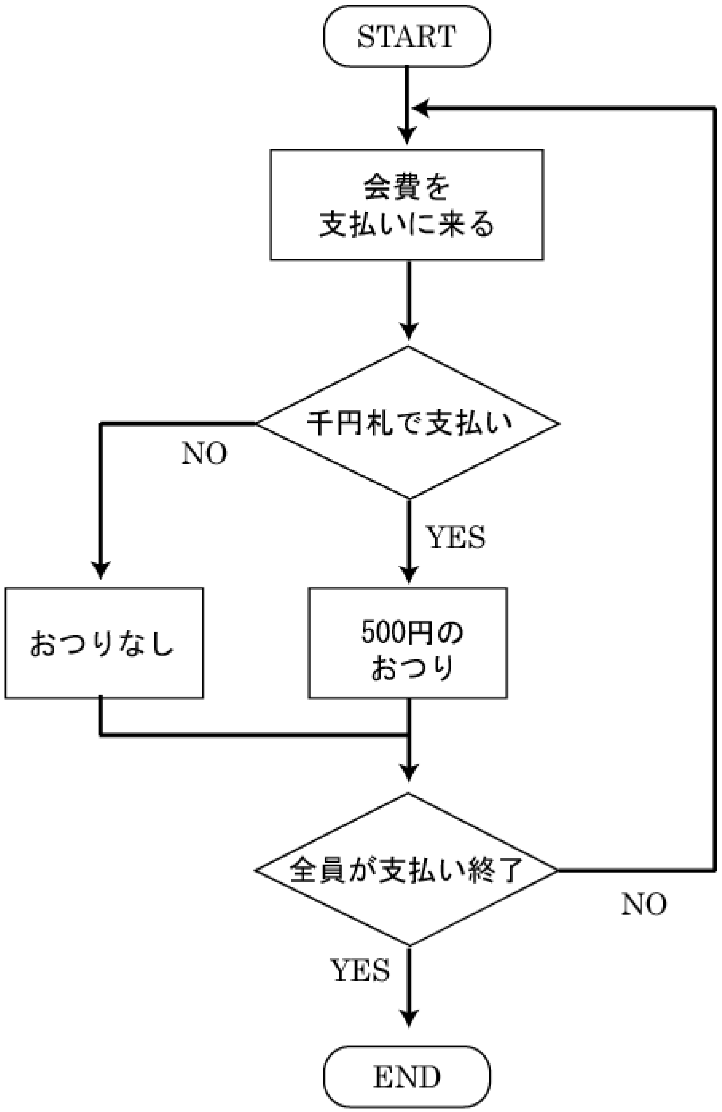
- 解答例

概要：

サークル会費500円を集める

支払いは千円札か500円玉

全員が支払ったら終了



第2回のレポート

- 解答例2

概要：

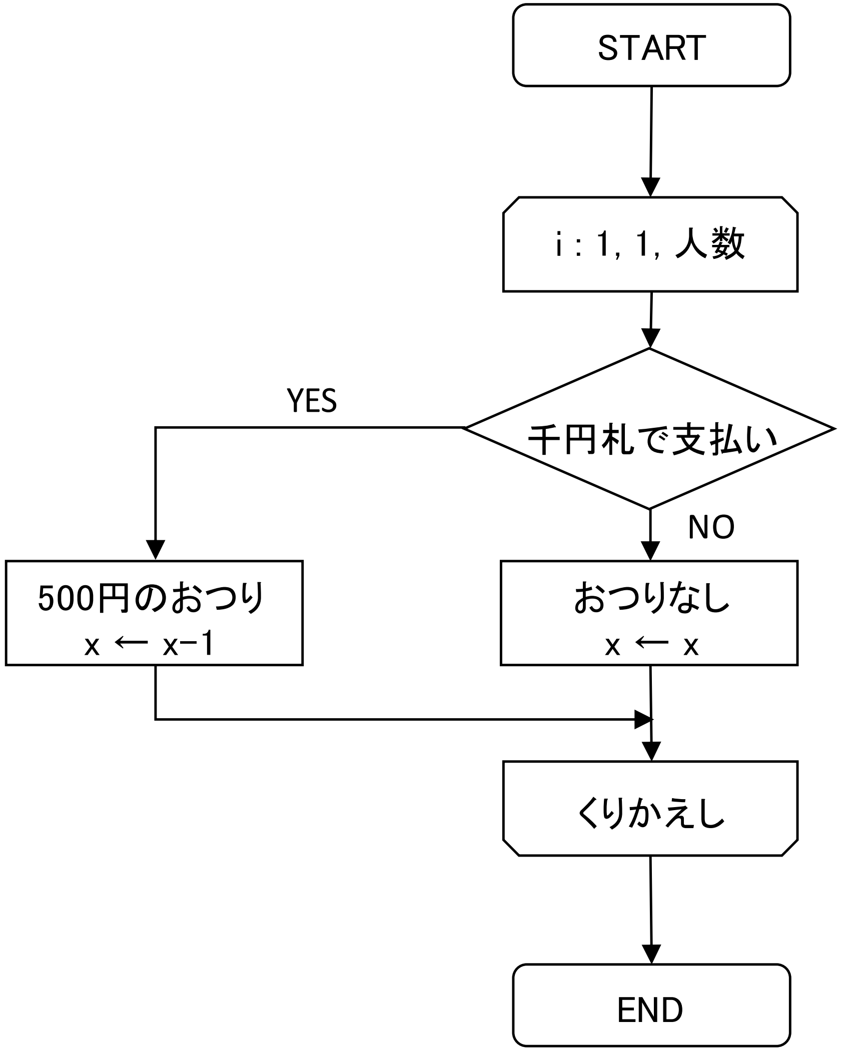
サークル会費500円を集める

支払いは千円札か500円玉

全員が支払ったら終了

500円玉の枚数をx、

人数のカウンタを i とする



今回の内容

- モデル化が終わったら、次は何をするか？
  →適切な解法・シミュレーション手法の検討
- シミュレーションでよく必要とされる手順＝最適化
- 基礎的な最適化手法である「線形計画法」を学ぶ

モデルと解法

- ある問題を解くためのモデル化が終了したら、適切な解法（いかに問題を解くか）を考えなくてはならない
- 基礎的な問題のいくつかには既に適切な解法が提案されている

最適化問題

- 最適化問題：一定の条件（制約）のもとで、利益を最大化したりコスト最小化するなどの目的を達成する問題

- 最大化したり最小化する目的関数と条件をあらわす制約条件式により数理モデルとして記述される

- 最適化問題の解法
  - **数理計画法（数学的に解く方法）**
  - **遺伝的アルゴリズムなど（準最適解を求める方法）**

  など

最適化問題の例

- 例題：パソコンの仕入れ
- ある電気店でパソコン（デスクトップパソコンとノートパソコン）を仕入れる。以下の条件のとき、利益を最大にするにはそれぞれ何台ずつ仕入れればよいか。
  - 倉庫は全体で30区画利用できる
  - 倉庫の中でデスクトップパソコンは3区画、ノートパソコンは2区画を占有する
  - 仕入れ予算の上限は150万円である
  - デスクトップパソコンの仕入れ値は10万円、ノートパソコンの仕入れ値は15万円である
  - デスクトップパソコンの販売利益は4万円、ノートパソコンの販売利益は3万円である

数理モデルの作成

- 前述のモデルを数式で表すと以下のようになる
- デスクトップPCの数をx、ノートPCの数をy、全体の販売利益をπとする

倉庫の区画の制限

$$3x + 2y \leq 30$$

仕入れ金額の制限

$$10x + 15y \leq 150$$

仕入れ個数はマイナスとは考えにくいので

$$x, y \geq 0$$

制約条件

販売利益（この式を最大化すればよい）

$$\pi = 4x + 3y$$

目的関数

線形計画法

- 前述のように、制約条件と目的関数がともに線形（一次式）であらわされる最適化問題を線形計画問題という

$$\boxed{\begin{aligned} &3x+2y \le 30 \\ &10x+15y \le 150 \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}}$$

制約条件（連立一次不等式）

$$\boxed{\pi = 4x+3y}$$

目的関数（一次方程式）

- 線形計画問題を解く方法を線形計画法という
  - グラフを利用した解法
  - シンプレックス法
  - 表計算ソフトを利用する方法

  などがある

グラフによる解法―制約条件

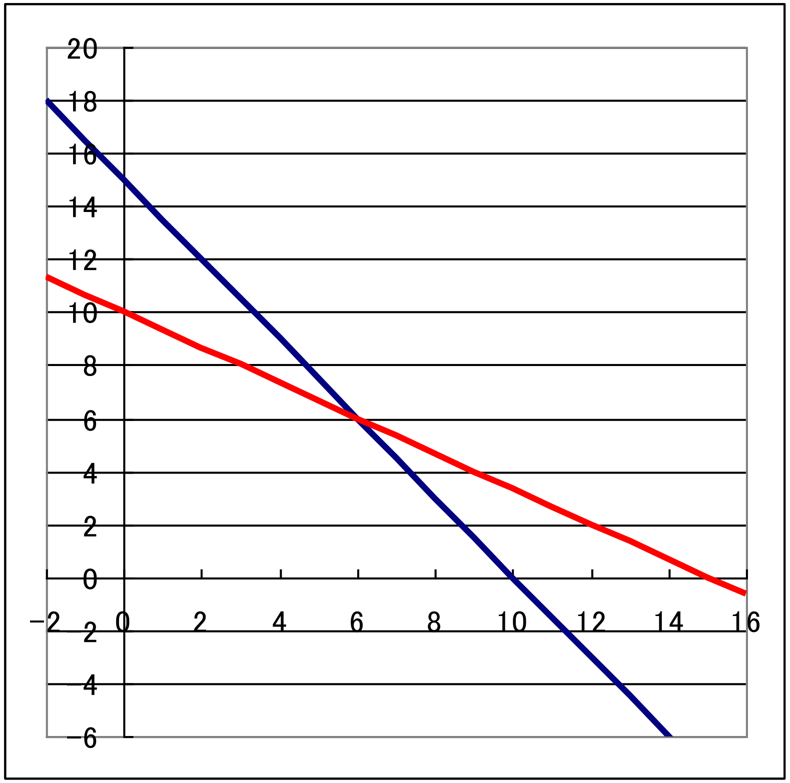
- 制約条件式が示す部分をグラフ上であらわしてみよう

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ 10x + 15y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- 上式を変形して

$$\begin{cases} y \leq -\dfrac{3}{2}x + 15 \\ y \leq -\dfrac{2}{3}x + 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

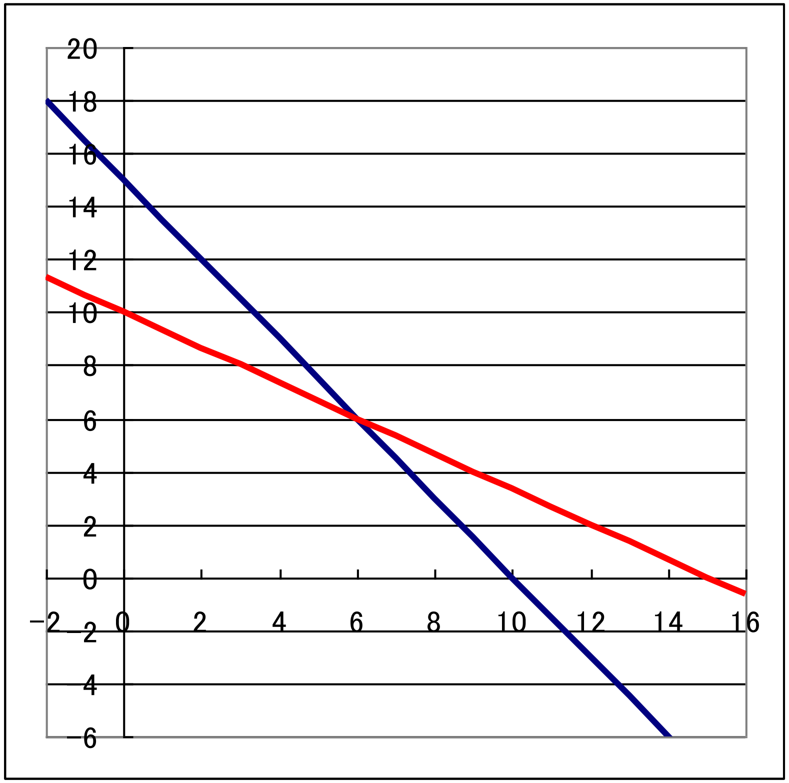
制約条件式が表す部分に斜線を引いてみよう



練習

- 作成したグラフ上で、制約条件を満たす部分に斜線を引いてみてください

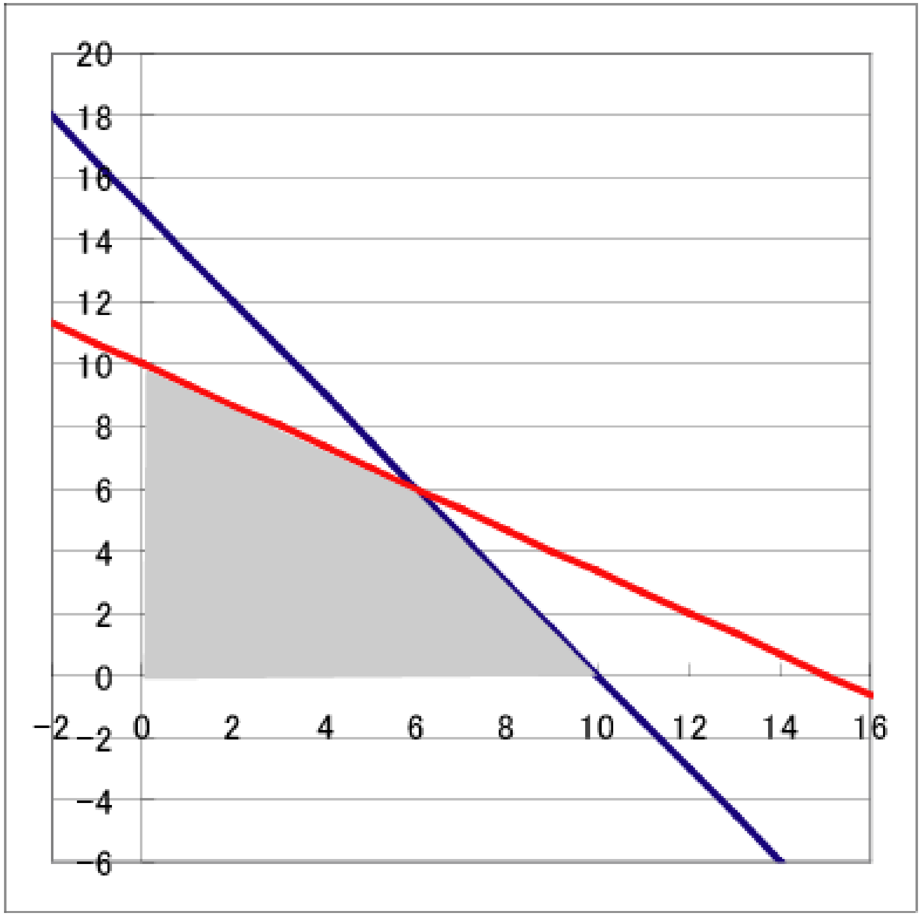
制約条件式が表す部分に斜線を引いてみよう



グラフによる解法―制約条件を満たす領域

- 以下の制約条件を満たす領域は図の灰色部分になる
  ＝求める解(x,yの組み合わせ)はこの領域の中にある！

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 30 \\ 10x + 15y \le 150 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



グラフによる解法—目的関数

- 制約条件を満たし、かつ目的関数を最大化する点(＝解)を求める

目的関数

$$\pi = 4x + 3y$$

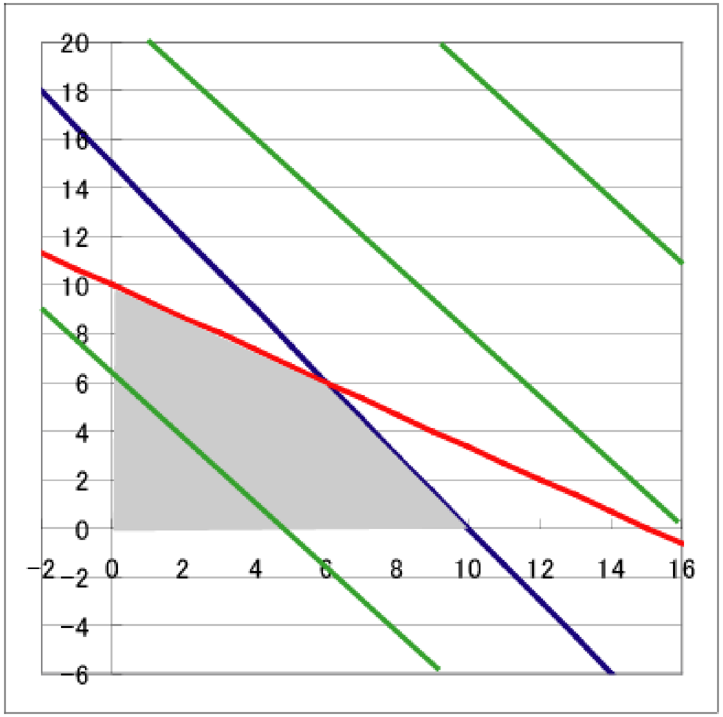
←πを最大化する

変形して

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\pi$$

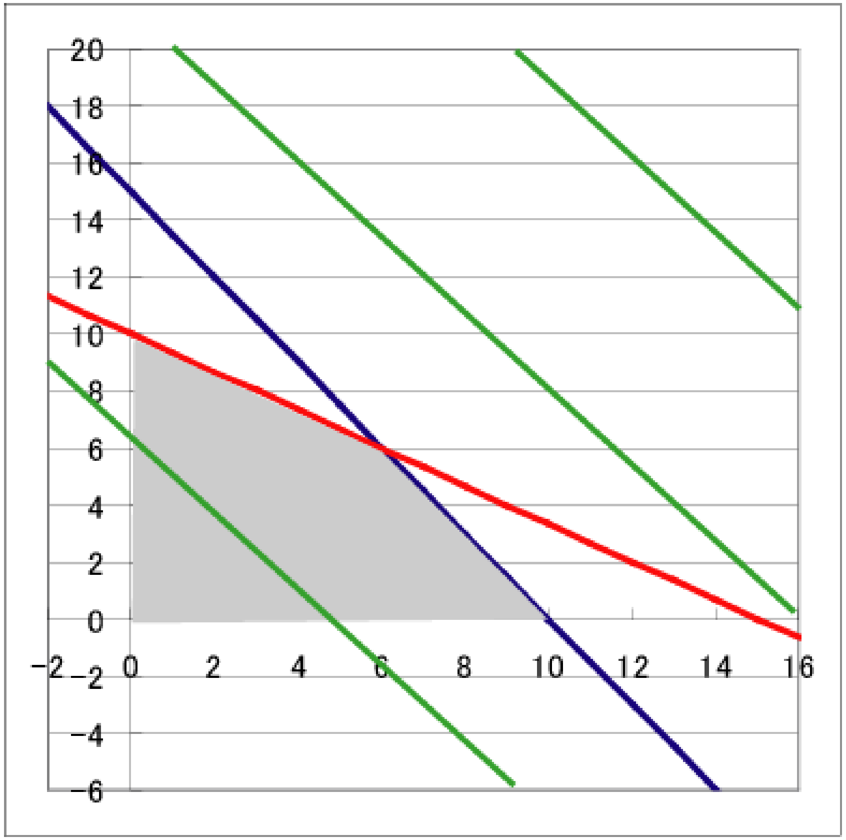
一次関数(直線の式)
πが最大＝y切片が最大

πの値によってy切片が変わる
傾き-4/3の直線



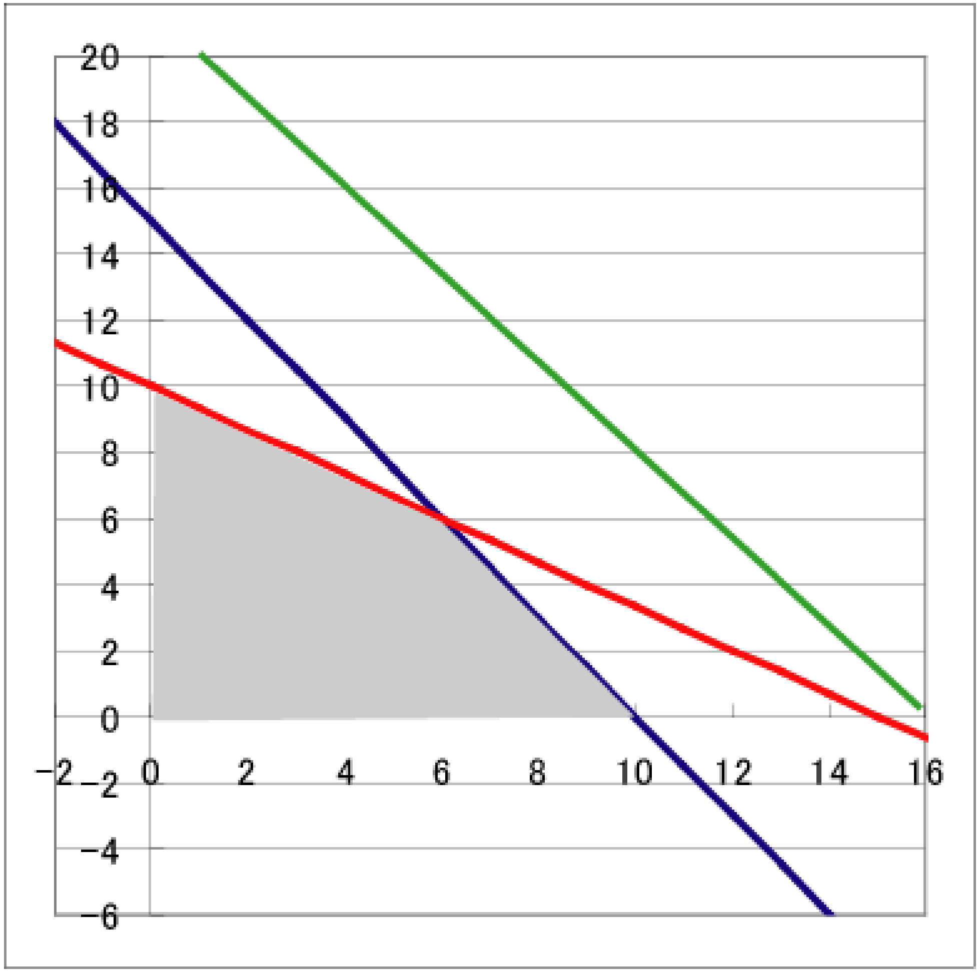
グラフによる解法—最適化

- 制約条件を満たし、かつ目的関数を最大化する点（＝解）を求める
  - 制約条件を満たす＝目的関数がグラフの灰色の領域を通る
  - 目的関数を最大化する＝目的関数のy切片が最大となる



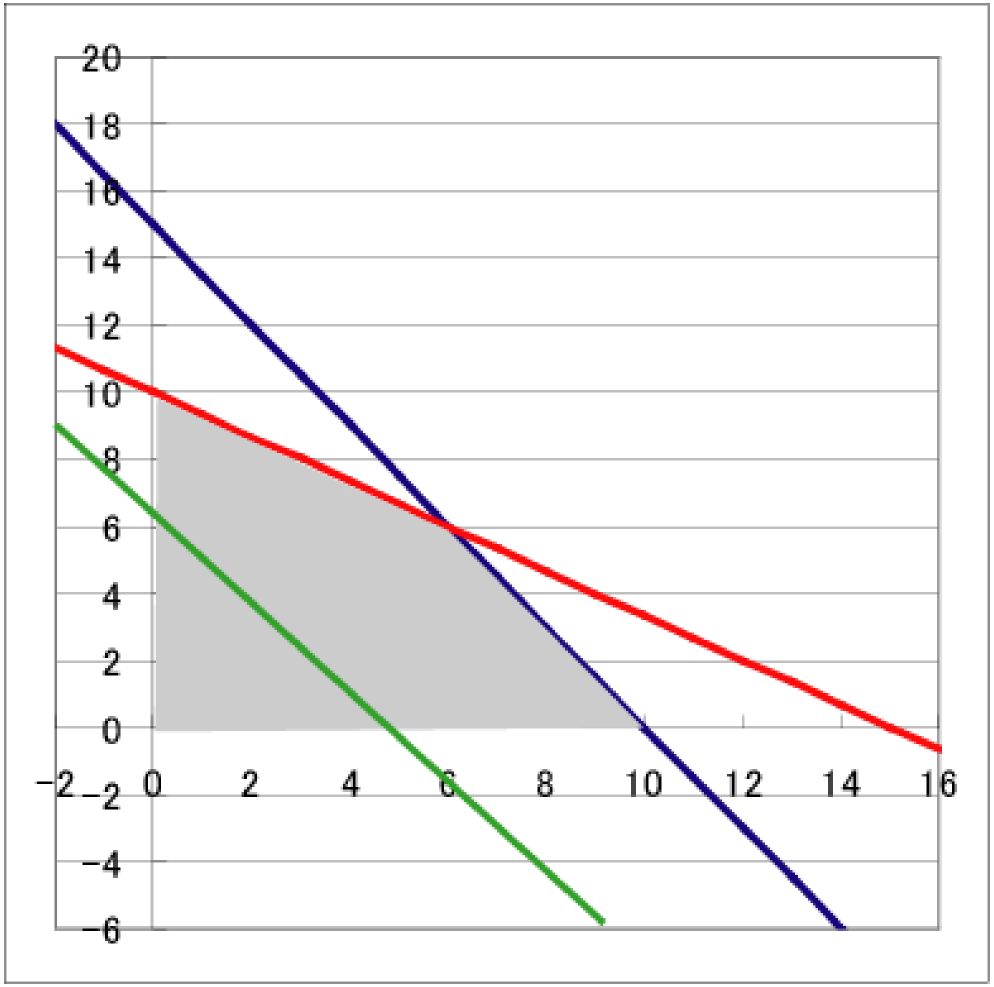
例1

- y切片は大きいが制約条件を満たさない（灰色の領域を通らない）



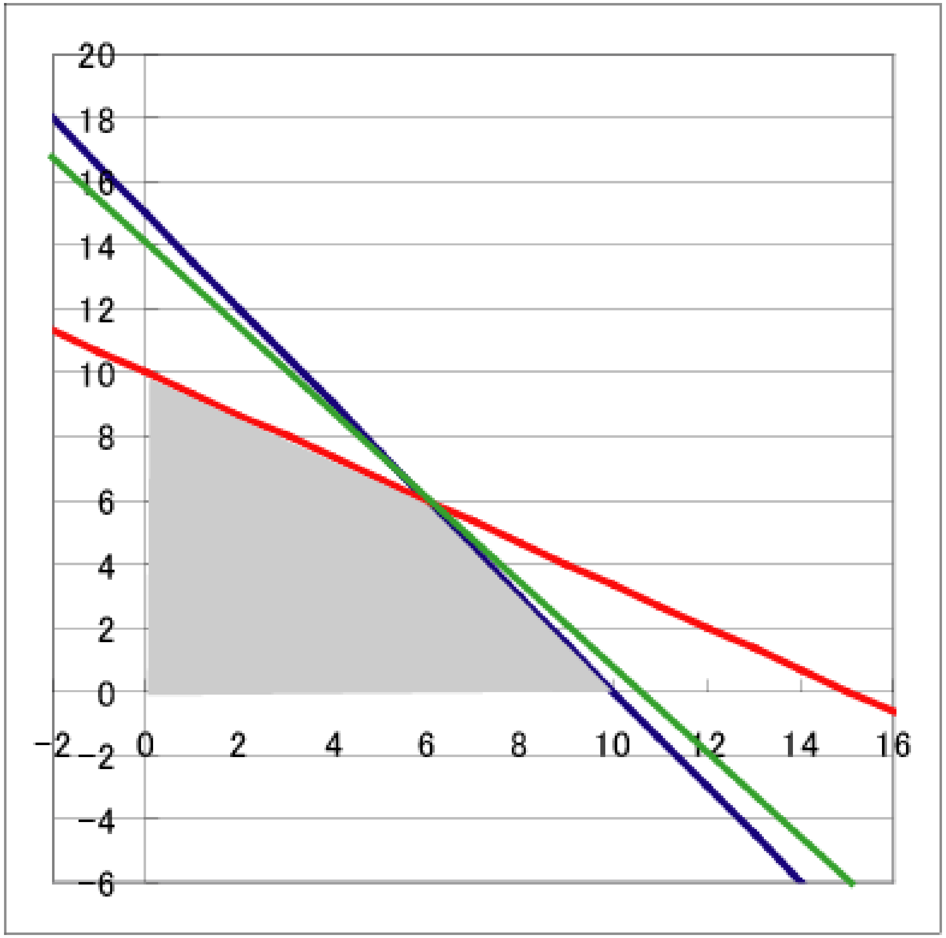
例2

- 制約条件は満たすがy切片をさらに大きく出来る



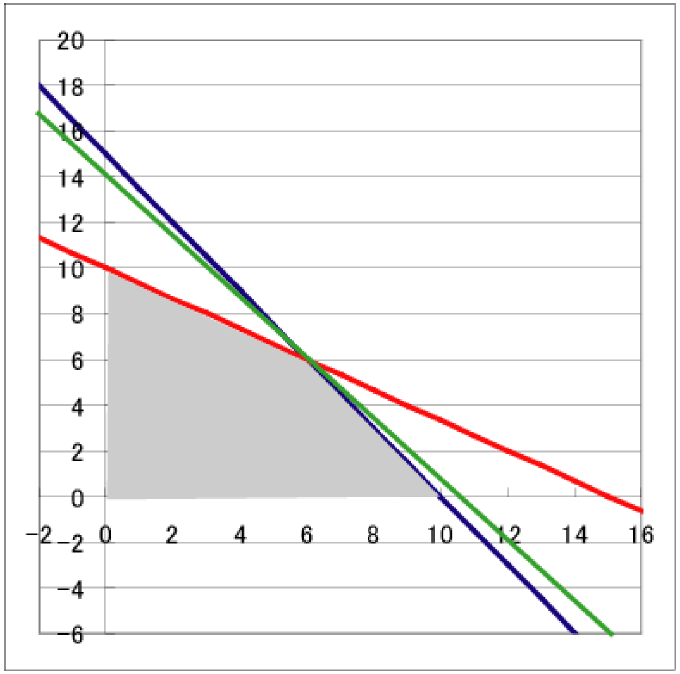
例3—最適解

- 制約条件を満たす目的関数のうちでy切片が最大となる＝最適解
- 目的関数のうち、灰色の部分を通る部分のx,yの組み合わせが最適解



練習

- 図より、利益を最大にするデスクトップPCとノートPCの個数の組み合わせは、赤と青の直線の交点となる
- すなわち、以下の連立方程式の解となる



$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 10x + 15y = 150 \end{cases}$$

最適解 (x, y) とそのときの利益 π を求めてください

グラフによる解法―最適解の導出

- 図より、利益を最大にするデスクトップPCとノートPCの個数の組み合わせは、赤と青の直線の交点となる
- すなわち、以下の連立方程式の解となる

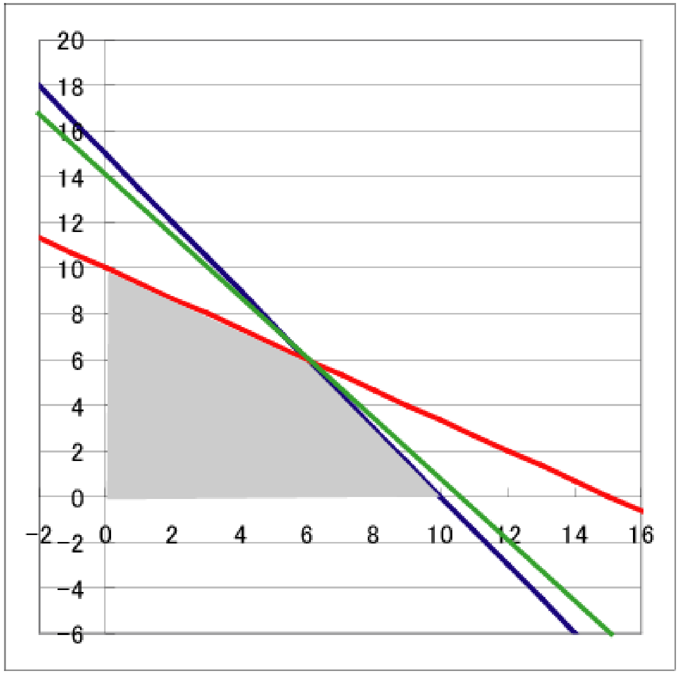
$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 10x + 15y = 150 \end{cases}$$

これを解いて

$$x = 6, y = 6$$

このときの利益は

$$\pi = 4x + 3y = 42$$



よって利益が最大となるときの仕入れ台数はデスクトップPC、ノートPCともに6台で、そのときの利益は42万円。

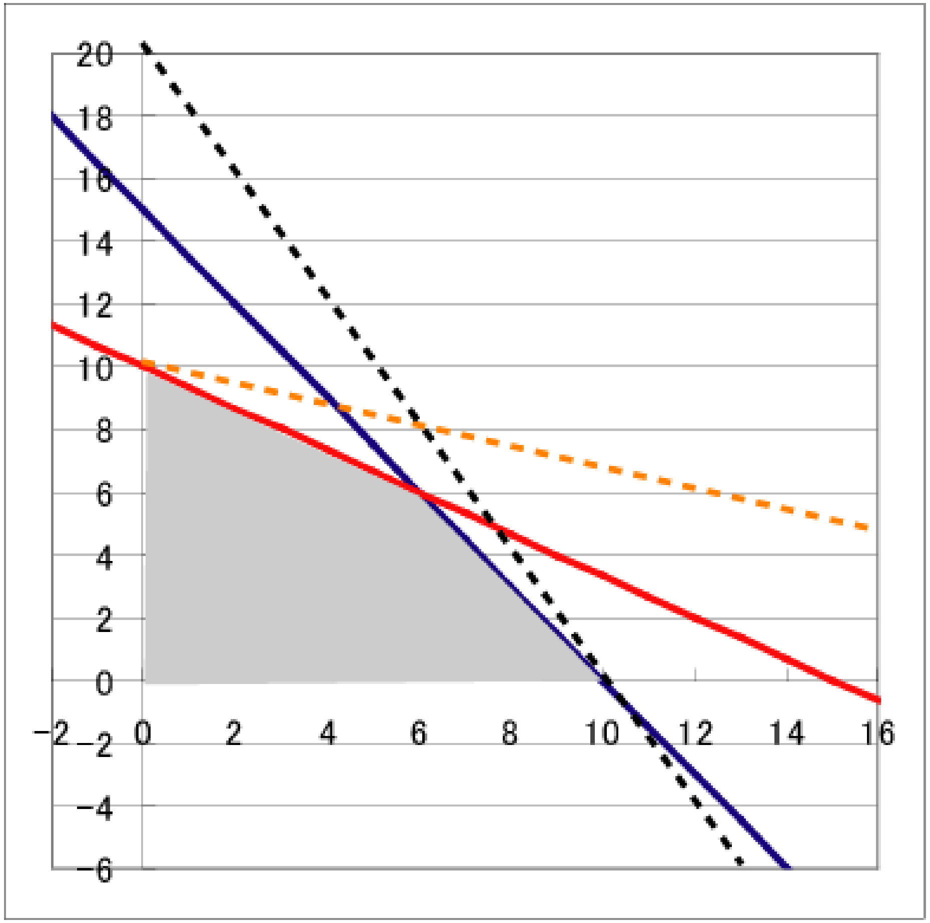
例題

- 目的関数の傾きがもっと大きい場合や小さい場合はどうなるだろうか？
- 例1）

$$\boxed{\pi = x + 3y}$$

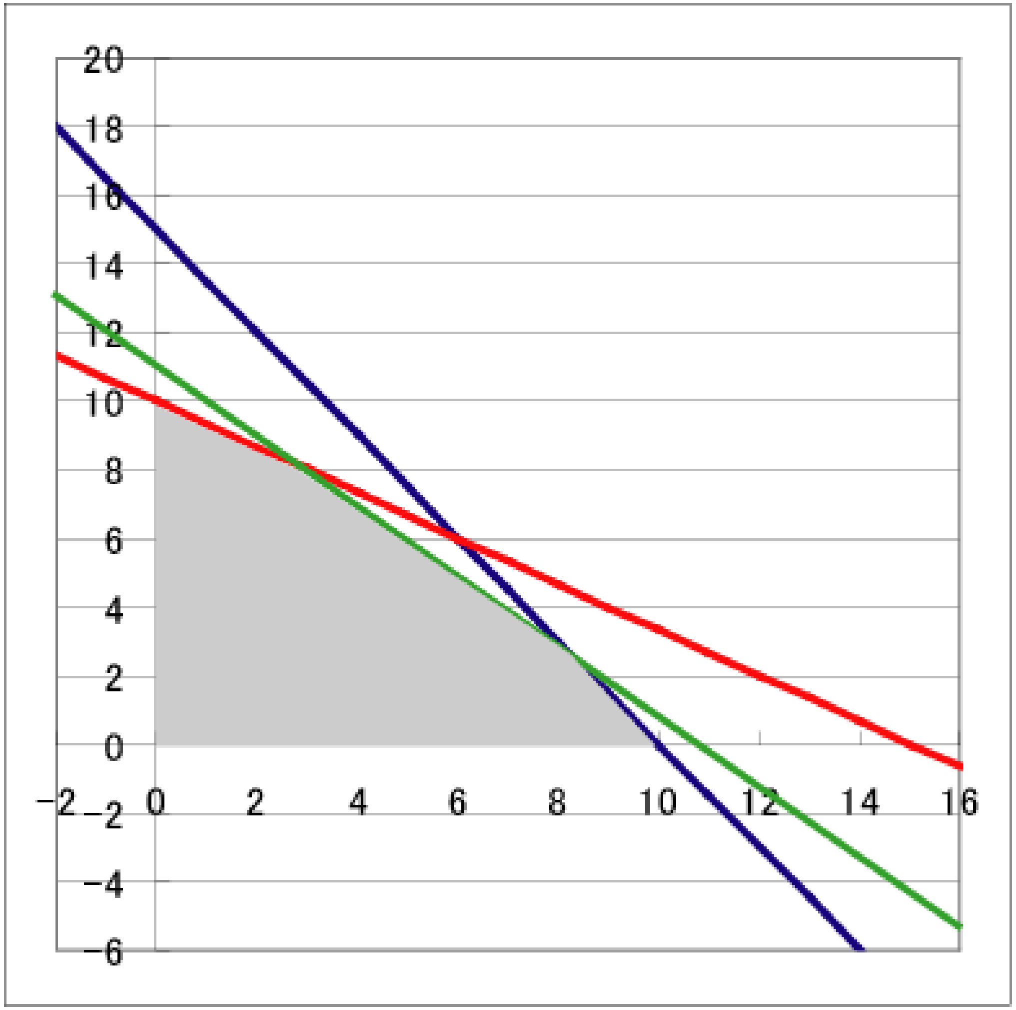
- 例2）

$$\boxed{\pi = 2x + y}$$



例題

- 制約条件が増えたらどうなるだろうか？



第3回のレポート

- 以下の線形計画問題をグラフを用いて解け。
  出席カードには答えのみ記入すればよい。

- ある会社では製品AとBを生産しており、どちらも原料p、q、rが必要である。
  - **製品Aを1個作るには原料 p が2kg、q が1kg、r が3kg必要である。**
  - **製品Bを1個作るには原料 p が1kg、q が3kg、r が4kg必要である。**
  - **原料 p、q、r はそれぞれ最大17kg、21kg、33kgまで使える。**
  - **製品1個あたりの利益は A が1万円、B が2万円である。**

  利益を最大にするにはA、Bそれぞれ何個作ればよいか。
  また、そのときの利益はいくらか。

- 次回はノートパソコンを使用します。
  お持ちの方はしっかり充電したうえで持参してください（ノートPCをお持ちでない場合はなくても構いません）