

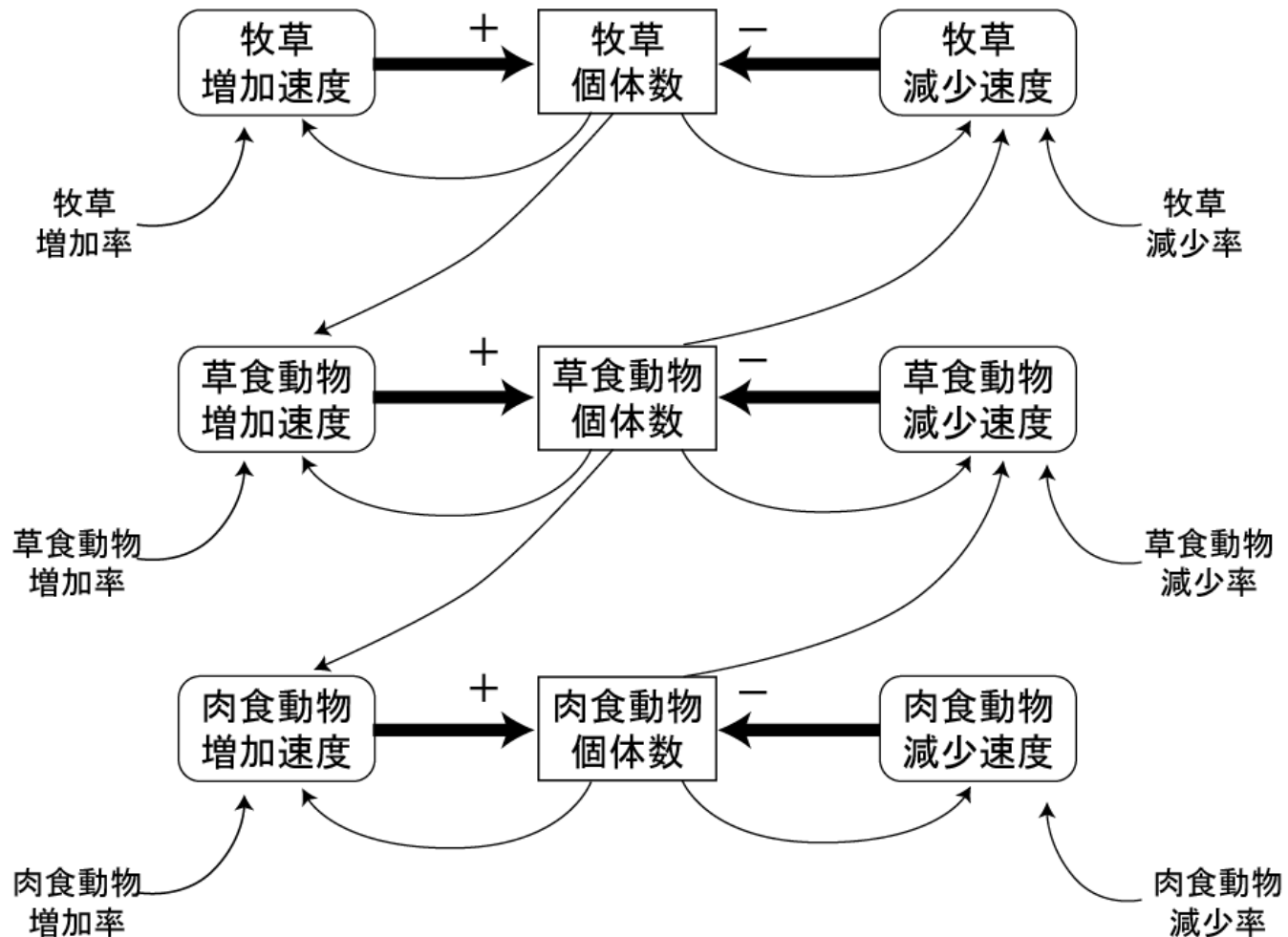
# シミュレーション論 II

## 第5回

ランダムウォーク

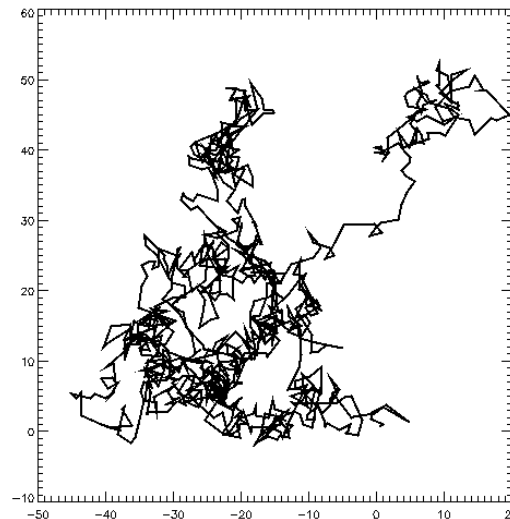
# 第4回のレポート(解答例)

- 被食者の減少速度と捕食者の個体数、捕食者の増加速度と被食者の個体数がそれぞれ関連していることに注意



# ランダムウォーク

- 物体(人・粒子など)の移動する方向(および距離)が確率的に与えられており、時間とともにその動きを追うような問題
- 元々はブラウン運動(水に浮かぶ花粉の不規則な運動)をシミュレートするためにモデル化されたもの



ブラウン運動のシミュレーション(Wikipediaより引用)

# ランダムウォークの利用

- ランダムウォーク・シミュレーションはブラウン運動のモデルのほか、情報の伝達や物質の流れの解析にも応用されている
- ランダムウォークの性質：
  - 確率的(ランダム)に移動する
  - 軌跡が連続している(つながっている)
  - 至る所で微分不可能である(ギザギザである)
- さらに詳しく知りたい方は応用確率論などの書籍を参考にしてください

# ランダムウォークと社会現象

- このような性質を持つ現象は社会に非常に多い
  - 株価・為替相場
  - 人の移動軌跡
  - 分子の運動 など



ランダムウォークにより生成された株価チャート

# Excelをによる簡易シミュレーション

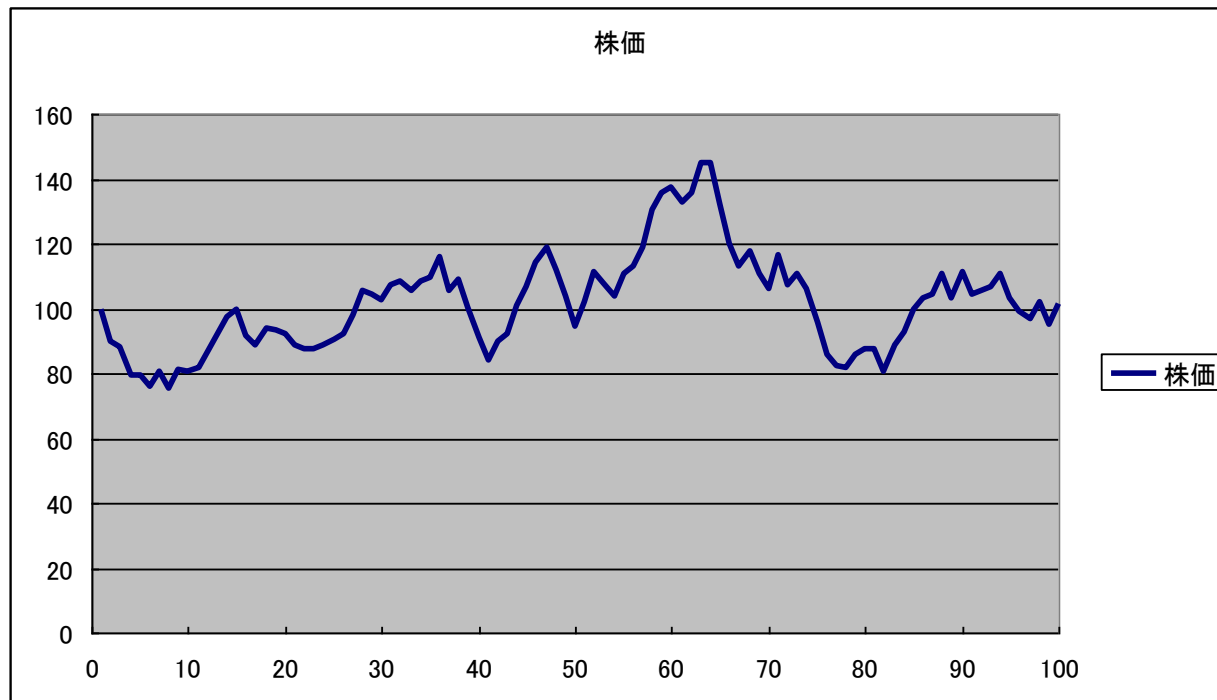
- ごくシンプルなランダムウォークによる株価チャートの再現
- 各日の終値が前日終値の90~110%の間でランダムに変動すると仮定

	A	B
1	日数	株価
2	1	100
3	2	=B2*RANDBETWEEN(90,110)*0.01
4		
5		

- 上のように記述したら下へ100日くらいまでコピーし、散布図でグラフを描く
- F9キーでグラフが変化する
- ノートPCをお持ちでない方は別課題1をやってください

## Excelをによる簡易シミュレーション(2)

- F9キーを押してグラフがどのように変化するか見てみよう
- 単純な上下動ではなく、なんとなくトレンドが見える？
- うまくいったら変動幅を変えてみよう



# ランダムウォークの例：酔っ払いの歩行

- 酔っ払いの歩行：  
碁盤目状の道を酔っ払いがフラフラと歩いている様子を考えてみよう
- この酔っ払いは
  - ある地点から出発し、1回あたり上下左右いずれかに $1/4$ の確率で進む
  - 10回進んだとき、この酔っ払いはスタート地点からどれくらい離れているだろうか
  - 乱数表と方眼紙を使ってシミュレーションしてみよう

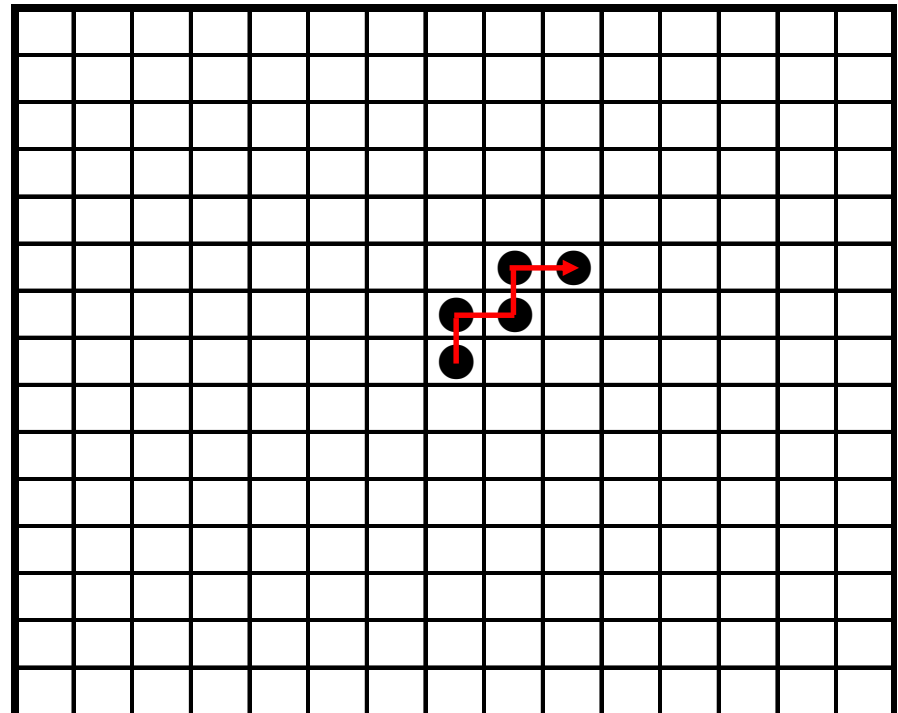


## ランダムウォークの例(2)

- 乱数表を用いた手作業でのシミュレーション
  - 1~4の数字が出る一様乱数を使用
  - それぞれの数字を上、下、右、左に割り当てる

乱数	移動方向
1	上
2	下
3	右
4	左

回数	乱数	移動方向
1	1	上
2	3	右
3	1	上
4	3	右
5		
6		
7		
8		
9		
10		



# Excelによるランダムウォークの例

- 以下のような枠を作成してシミュレーションしてみよう
- ノートPCをお持ちでない方は別課題2をやってください

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		乱数	x始点	y始点	x変化	y変化	x座標	y座標	
2	0																				
3	1																				
4	2																				
5	3																				
6	4																				
7	5																				
8	6																				
9	7																				
10	8																				
11	9																				
12	10																				
13																					
14																					

- 手作業と同様に乱数を用いて移動方向を決める

## Excelによるランダムウォークの例(2)

- N2~T2セルまで以下のように入力する(循環参照エラーが出るので注意→「キャンセル」を押して続行)

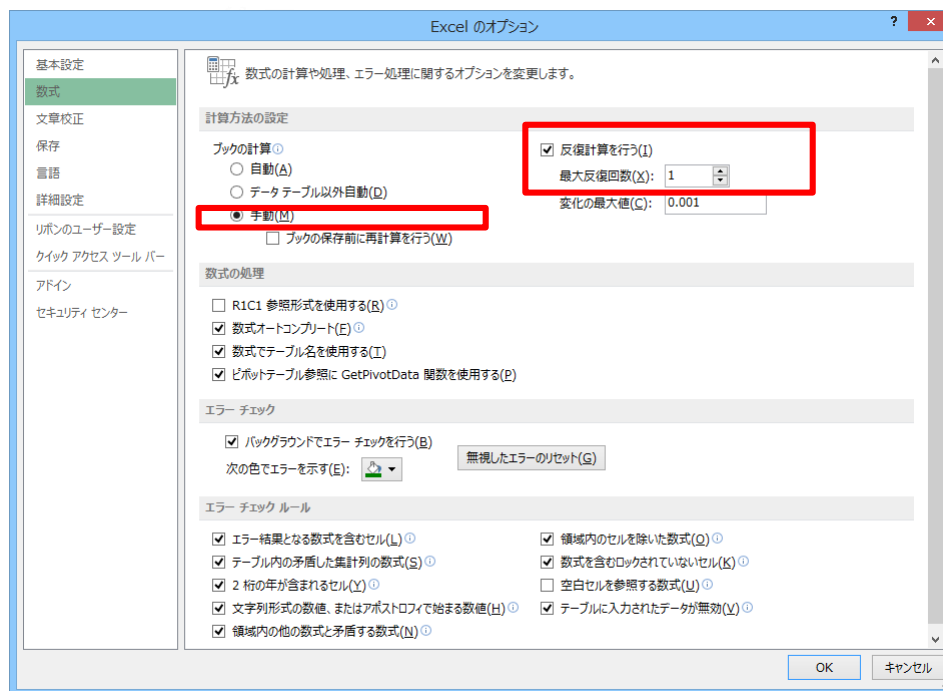
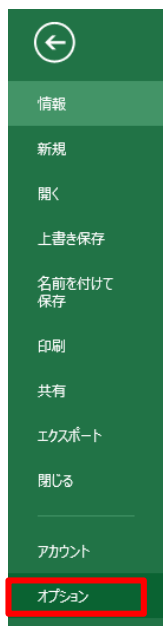
	M	N	O	P	Q	R	S	T
1		乱数	x始点	y始点	x変化	y変化	x座標	y座標
2		=RANDBETWEEN(1,4)	5	5	=IF(N2=1,Q2,IF(N2=2,Q2,IF(N2=3,Q2+1,Q2-1)))	=IF(N2=1,R2+1,IF(N2=2,R2-1,IF(N2=3,R2,R2)))	=O2+Q2	=P2+R2

- (N2セル) =RANDBETWEEN(1,4)      乱数を生成
- (O2セル)、(P2セル) 5      スタート位置決定
- (Q2セル) =IF(N2=1,Q2,IF(N2=2,Q2,IF(N2=3,Q2+1,Q2-1)))
- (R2セル) =IF(N2=1,R2+1,IF(N2=2,R2-1,IF(N2=3,R2,R2)))  
乱数が1なら下、2なら上、3なら右、それ以外なら左へ移動
- (S2セル) =O2+Q2      x座標計算
- (T2セル) =P2+R2      y座標計算



# 循環参照の許可

- 循環参照を許可して繰り返し計算ができるようにする
- 「ファイル」メニューから「オプション」を選び、「数式」タブから計算方法を「手動」とし、「反復計算を行う」にチェックを入れて「最大反復回数」を「1」にする
- できたら「F9」キーを押して実行してみよう



# ランダムウォークと確率論

- 先の問題で酔っ払いが4方向に異なる確率で歩いたらどうなるか、壁があってぶつかってしまうとしたらどうなるか、など状況が変わると動きは複雑になる
- 無作為(ランダム)な動きの結果がどうなるか、という問題は確率論においても重要なテーマである
- 参考
  - ランダムウォーク問題は先の酔っ払いの例をとって「酔歩問題」とも呼ばれる

# 一次元ランダムウォーク

- 移動方向を直線上(1次元)に限定する場合のランダムウォークを1次元ランダムウォーク、または直線上のランダムウォークという
- 先ほどの平面上のランダムウォークと同様、数直線上である確率に従った動きをするものと考え
- 1次元ランダムウォークの著名な問題として、「ギャンブラーの破産問題」というものがある

# ギャンブラーの破産問題(例)

- A, Bの2人の人が5\$ずつ持っている
- コインを投げて表ならA, 裏ならBが相手から1\$もらえる
- どちらかの所持金がなくなったら終了
- このゲームを繰り返したとき、それぞれの所持金はどうなるだろうか？
- また、5\$を相手に取られてしまっって破産する確率はどの程度だろうか？

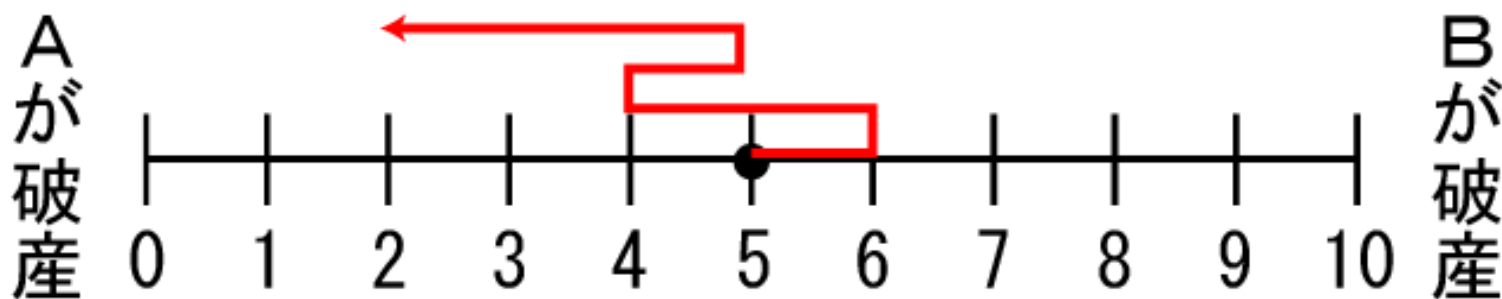


- コイン投げゲームで表・裏が出る確率をそれぞれ50%とすると、直線上のランダムウォーク問題として表せる



# ギャンブラーの破産問題

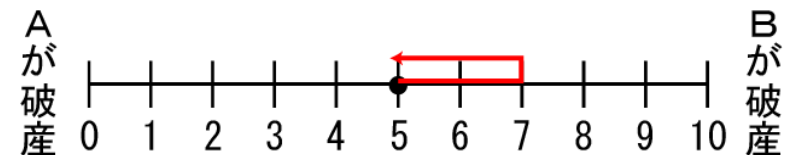
- 以下のような数直線を用いて直線上のランダムウォークとして扱う
- 仮にAの所持金を数直線にすると、5からスタートして
  - コインが表 → 右へ1移動(+1)
  - コインが裏 → 左へ1移動(-1)
  - 位置が0に到達したらAが破産(終了)
  - 位置が10に到達したらBが破産(終了)



# ギャンブラーの破産問題(例)

- 0~9の乱数をそれぞれコインの表・裏に割り当てる
- 乱数が0~4のときコインは表→Aの勝ちでAの所持金+1
- 乱数が5~9のときコインは裏→Bの勝ちでAの所持金-1

回数	乱数	移動	位置
0			5
1	4	+1	6
2	2	+1	7
3	8	-1	6
4	5	-1	5
5			
6			



# ギャンブラーの破産問題: 確率分布の計算

- 次に、ある回数を繰り返したときに所持金がどうなっているかの**確率分布**を調べる
- 例えばある時点で5 \$ 持っている確率が100%なら、次の時点では「4 \$ 持っている確率が50%」、「6 \$ 持っている確率が50%」、それ以外の可能性はゼロとなる

持ち金	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
スタート	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1回目	0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0
2回目	0	0	0	0.25	0	0.5	0	0.25	0	0	0

↑  
4 \$ 持っていた場合に勝って5 \$ になる確率が  $0.5 \times 0.5$  で0.25、  
5 \$ 持っていた場合に負けて5 \$ になる確率が  $0.5 \times 0.5$  で0.25、  
合計で0.5となる

## ギャンブラーの破産問題: 確率分布の計算(2)

- 両端の取り扱い: 所持金が0\$または10\$になるとゲーム終了であるため、0から1へ、または10から9へ移ることはない
- そのため、1\$および9\$である確率は両端ではなく内側からの移動だけを考える
- 例) 所持金が1\$からスタートした場合

持ち金	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
スタート	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1回目	0.5	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
2回目	0.5	0.25	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0
3回目	0.625	0	0.25	0	0.125	0	0	0	0	0	0

0\$から1\$に戻ることはないので、1\$持っている確率は「2\$持っていたが負けて1\$になった」という場合のみになる

そのため0\$の確率は徐々に増えて行く



## 練習問題の解答

- 10回までの繰り返しで、所持金の確率分布を計算すると以下のようになる
- ポイント: 所持金が0または10になった場合、そこから増加/減少することはない

持ち金	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
スタート	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1回目	0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0
2回目	0	0	0	0.25	0	0.5	0	0.25	0	0	0
3回目	0	0	0.125	0	0.375	0	0.375	0	0.125	0	0
4回目	0	0.063	0	0.25	0	0.375	0	0.25	0	0.063	0
5回目	0.031	0	0.156	0	0.313	0	0.313	0	0.156	0	0.031
6回目	0.031	0.078	0	0.234	0	0.313	0	0.234	0	0.078	0.031
7回目	0.07	0	0.156	0	0.273	0	0.273	0	0.156	0	0.07
8回目	0.07	0.078	0	0.215	0	0.273	0	0.215	0	0.078	0.07
9回目	0.109	0	0.146	0	0.244	0	0.244	0	0.146	0	0.109
10回目	0.109	0.073	0	0.195	0	0.244	0	0.195	0	0.073	0.109

## 参考：所持金・ゲームの勝率と破産確率

- 破産問題については色々と調べられており、
  - A: 資金が  $a$  でゲームの勝率が  $p$
  - B: 資金が  $b$  でゲームの勝率が  $q (= 1 - p)$

の場合、AがBを破産させる確率は以下のようになることが分かっている(どちらかが破産するまで繰り返した場合)

$p \neq q$  のとき

$$P_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

$p = q$  のとき

$$P_A = \frac{a}{a+b}$$

# ランダムウォークと吸収・反射

- 破産問題での「破産」のように、一定の位置に達したら終了する(他の状態に移れなくなる)ことを**吸収**といい、その状態を**吸収状態**という
- 酔っ払いの歩行などのとき、壁があってそちらには進めない(他の方向へは進める)ような場合を「**反射**」という
- 他にも、ある位置に達したらそこで溜まる「**滞留**」などがある
- ランダムウォークでは移動に関する条件のほか、このような境界条件も大事になってくる



# ランダムウォークの応用例

- ランダムウォークの応用例としては以下のようなものがある
  - ブラウン運動のシミュレーション
  - 電子の動きのシミュレーション
  - うわさ話の伝播
  - 感染症の伝播
  - 株価の変動など
- また、マルチエージェントシミュレーションなどの基本部分としても使用されることがある

# 第5回のレポート

- 以下の破産問題を1次元ランダムウォークを用いてシミュレーションしてみよう(5回分×5回)

A:所持金 2\$, ゲームの勝率60%

B:所持金 8\$, ゲームの勝率40%

- また、5回繰り返したときのAの所持金がどうなっているかの確率分布を計算してみよう
- 5回分のシミュレーション結果(最終位置)と5回繰り返したときの最終的な確率分布を出席カードに書いて提出

- 次回もノートパソコンを使用します。  
しっかり充電したうえで持参してください(ノートPCをお持ちでない場合はなくても構いません)