シミュレーション論 Ⅱ

第９回

カオスとフラクタル

前回のレポート　解答例

- 図のS1からスタートし、「上」→「下」→「左」→「右」の順に行動が選択された場合、各状態のQ値がどうなっているか計算せよ。ただしQ値の初期値はすべて1とする。

S1（スタート）

上	1
下	1
左	1
右	1

S2

上	1
下	1
左	1
右	1

S3

上	1
下	1
左	1
右	1

S4（ゴール）

上	1
下	1
左	1
右	1

→

S1（スタート）

上	?
下	?
左	?
右	?

S2

上	?
下	?
左	?
右	?

S3

上	?
下	?
左	?
右	?

S4（ゴール）

上	1
下	1
左	1
右	1

解答例(1)

- 各状態でのQ値の初期値を1とする
- S1からスタートし、行動「上」が選ばれたとすると

→壁に当たるため位置はS1のまま、報酬は－1

→よって、Q値は

$$
\begin{aligned}
Q(S1,\text{上}) &\leftarrow (1-0.5)Q(S1,\text{上})+0.5[-1+0.9\max_{a} Q(S1,a)] \\
&= 0.5\times 1+0.5\times(-1+0.9\times 1) \\
&= 0.45
\end{aligned}
$$

S1(スタート)

上	**0.45**
下	1
左	1
右	1

S2

上	1
下	1
左	1
右	1

S3

上	1
下	1
左	1
右	1

S4(ゴール)

上	1
下	1
左	1
右	1

解答例（2）

- 次に、S1で行動「下」が選ばれたとすると
→状態はS3へ移動、報酬は 0
→よって、Q値は

$$\begin{aligned} Q(S1,\text{下}) &\leftarrow (1-0.5)Q(S1,\text{下}) + 0.5[0 + 0.9\max_{a} Q(S3,a)] \\ &= 0.5\times 1 + 0.5\times(0.9\times 1) \\ &= 0.95 \end{aligned}$$

S1（スタート）

上	0.45
下	**0.95**
左	1
右	1

S2

上	1
下	1
左	1
右	1

S3

上	1
下	1
左	1
右	1

S4（ゴール）

上	1
下	1
左	1
右	1

解答例(3)

- 次に、S3で行動「左」が選ばれたとすると
  →壁に当たるので状態はS3のまま、報酬は －1
  →よって、Q値は

$$Q(S3,\text{左}) \leftarrow (1-0.5)Q(S3,\text{左}) + 0.5[-1+0.9\max_a Q(S3,a)]$$
$$= 0.5\times 1 + 0.5\times(-1+0.9\times 1)$$
$$= 0.45$$

S1（スタート）

上	0.45
下	0.95
左	1
右	1

S2

上	1
下	1
左	1
右	1

S3

上	1
下	1
左	**0.45**
右	1

S4（ゴール）

上	1
下	1
左	1
右	1

解答例(4)

- 次に、S3で行動「右」が選ばれたとすると
  →状態はS4(ゴール)へ移動、報酬は 1
  →よって、Q値は

$$
\begin{aligned}
Q(S3,\text{右}) &\leftarrow (1-0.5)Q(S3,\text{右}) + 0.5[1 + 0.9\max_{a} Q(S4,a)] \\
&= 0.5\times 1 + 0.5\times(1+0.9\times 1) \\
&= 1.45
\end{aligned}
$$

S1(スタート)

上	0.45
下	0.95
左	1
右	1

S2

上	1
下	1
左	1
右	1

S3

上	1
下	1
左	0.45
右	**1.45**

S4(ゴール)

上	1
下	1
左	1
右	1

最終的なQ値は左図のようになる

カオス

- 1960年代、ローレンツにより発見
  対流問題に関する3変数の微分方程式があるパラメータ領域において不規則な挙動をしめす

- リーとヨーク
  「カオス」と命名
  3周期の周期点があればカオスが存在する
  リーとヨークの定理

カオスの定義

- カオスの厳密な定義は研究者によって異なる
  - 時間の経過とともに変化する決定論的なシステムにおいて、初期値に敏感に反応する非周期振動
  （伊藤俊秀、草薙信照「コンピュータシミュレーション」オーム社　より引用）

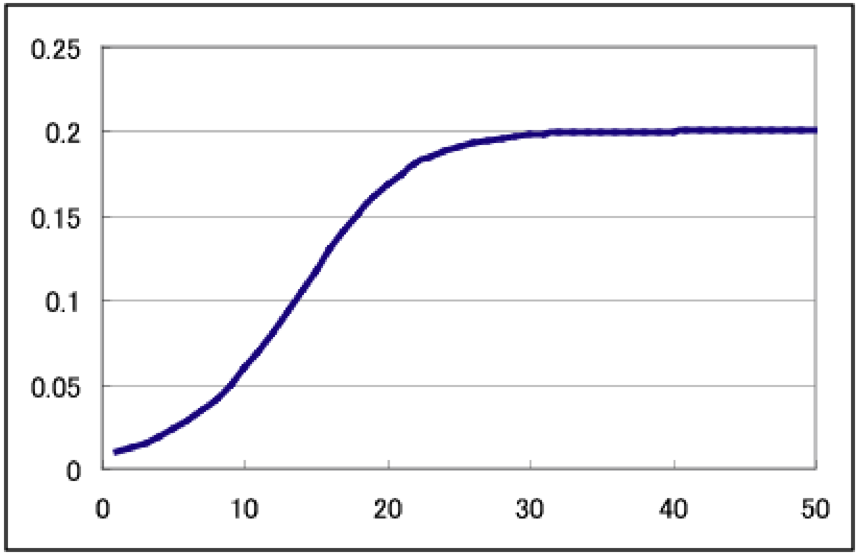
- カオスの必要条件
  - 非周期である
  - 何らかのリターンマップによって記述できる
  - リャプノフ指数が正である

ロジスティック曲線

- ロジスティック曲線：人口増加や製品の普及率などの記述に使用される曲線で、以下のような関数（ロジスティック関数で表される）

$$\frac{dy}{dx} = (-\alpha x + \beta)x$$

- ロジスティック曲線の例

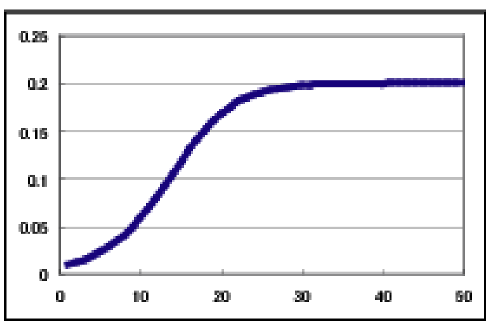


ロジスティック曲線のカオス性

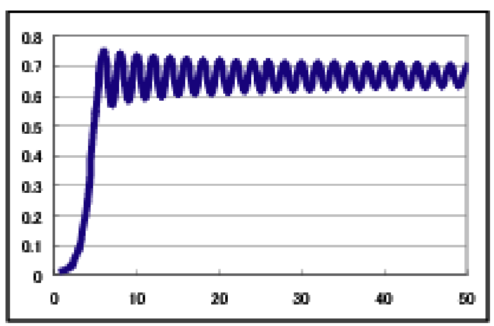
- ロジスティック関数を差分方程式であらわすと以下のようになる

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$$

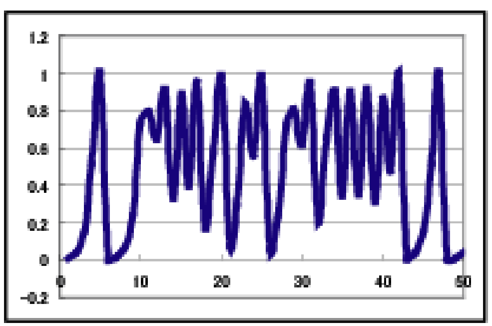
- このとき a の値によって x_n の値が大きく変化する



a ＝ 1.25



a ＝ 3



a ＝ 4

ロジスティック曲線のカオス性（2）

- a の値によって x_n が以下のように変化することがわかっている
  - $0 \leqq a \leqq 1$ ・・・ 0に収束
  - $1 < a \leqq 2$ ・・・ $1 - 1/a$ に収束
  - $2 \leqq a < 3$ ・・・ 振動しながら $1 - 1/a$ に収束
  - $3 \leqq a \leqq 3.569\ldots$ ・・・ 2^k 個の周期点で振動
  - $3.569\ldots \leqq a < 4$ ・・・ カオス性を示し、非周期で振動

（参考）Excelによるロジスティック曲線の描画

- 以下のような枠を作成する（注：n の列は 50 まで作成）

	A	B	C
1	n	Xn	a
2	0	0.01	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		

⋮

48	46		
49	47		
50	48		
51	49		
52	50		
53			

B3セルに以下のように記述し、下へコピー

（B3セル）　＝C$2＊B2＊(1－B2)

C2セルに以下のように記述（循環参照エラーが出たらキャンセルを押す）

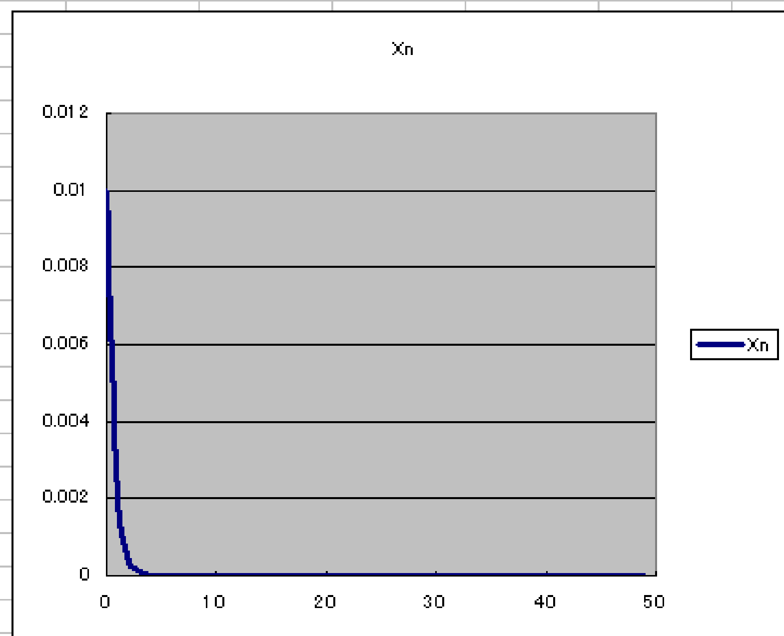
（C2セル）　＝IF(C2+0.1<4,C2+0.1,4)

- ノートPCのない人は別課題1をやってください

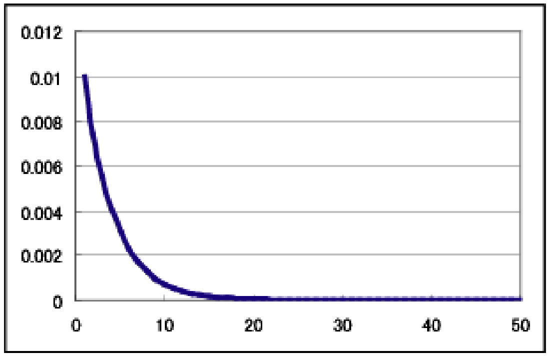
(参考)Excelによるロジスティック曲線の描画

- n, Xn の列を選択し、「散布図」でグラフを描く
- 循環参照を許可し、F9キーで再計算する

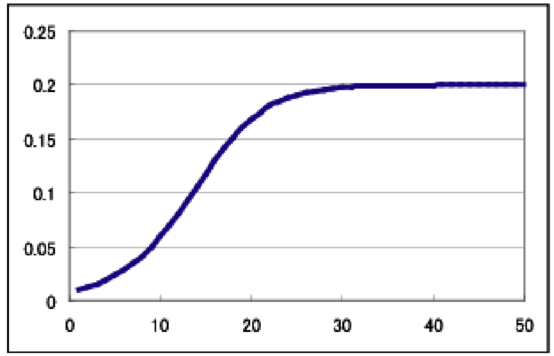
	A	B	C
1	n	Xn	a
2	0	0.01	0.1
3	1	0.00198	
4	2	0.000395	
5	3	7.9E-05	
6	4	1.58E-05	
7	5	3.16E-06	
8	6	6.32E-07	
9	7	1.26E-07	
10	8	2.53E-08	
11	9	5.06E-09	
12	10	1.01E-09	
13	11	2.02E-10	
14	12	4.05E-11	
15	13	8.09E-12	
16	14	1.62E-12	
17	15	3.24E-13	
18	16	6.47E-14	
19	17	1.29E-14	
20	18	2.59E-15	
21	19	5.18E-16	
22	20	1.04E-16	
23	21	2.07E-17	
24	22	4.14E-18	



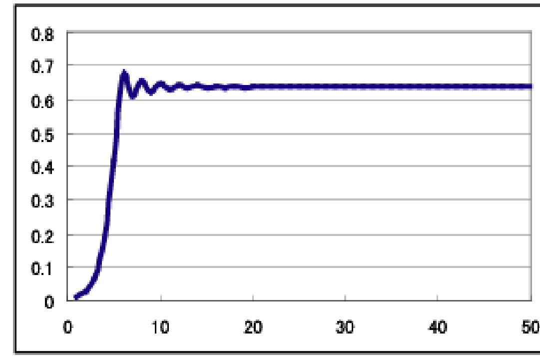
様々なロジスティック曲線の挙動



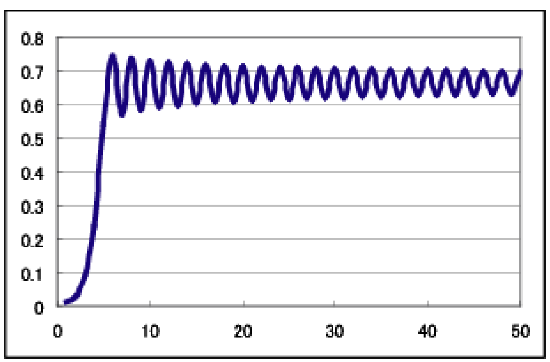
a ＝ 0. 75



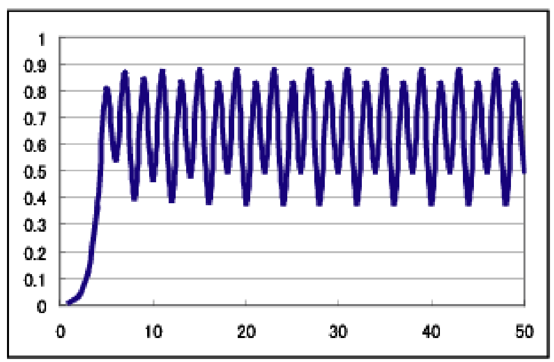
a ＝ 1. 25



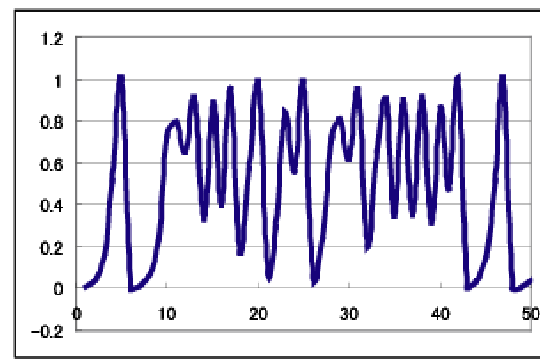
a ＝ 2. 75



a ＝ 3



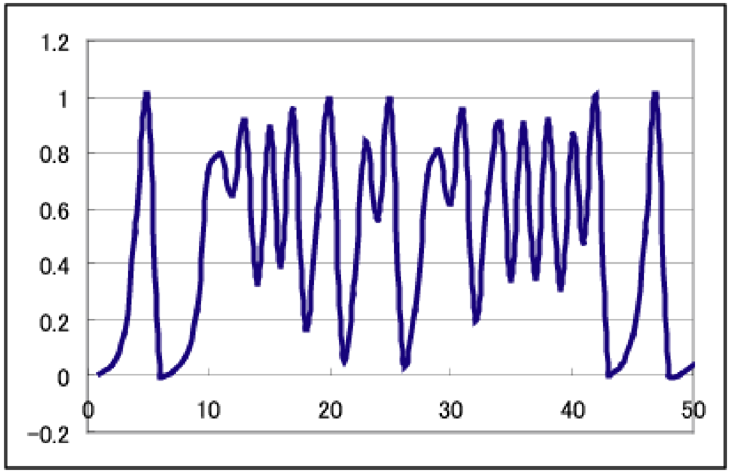
a ＝ 3. 5



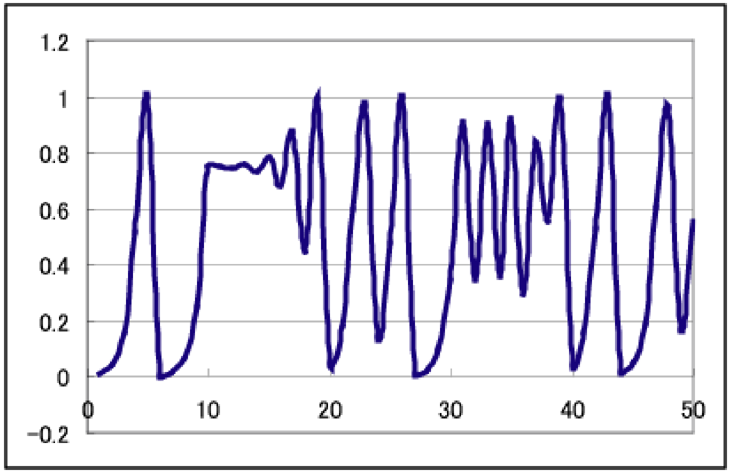
a ＝ 4

初期値とカオス

- カオスの特徴のひとつに「初期値に敏感に反応する」というものがある
- 先ほどの例は全て初期値(x_0)= 0.01の場合であるが、わずかに変えるだけで挙動が大きく異なる



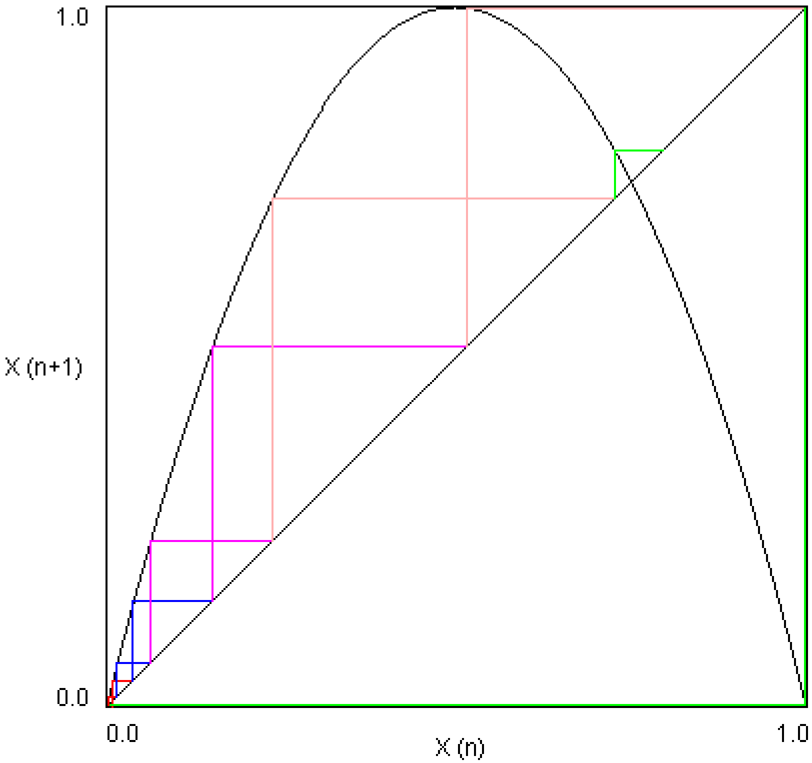
a = 4, x_0 = 0.01



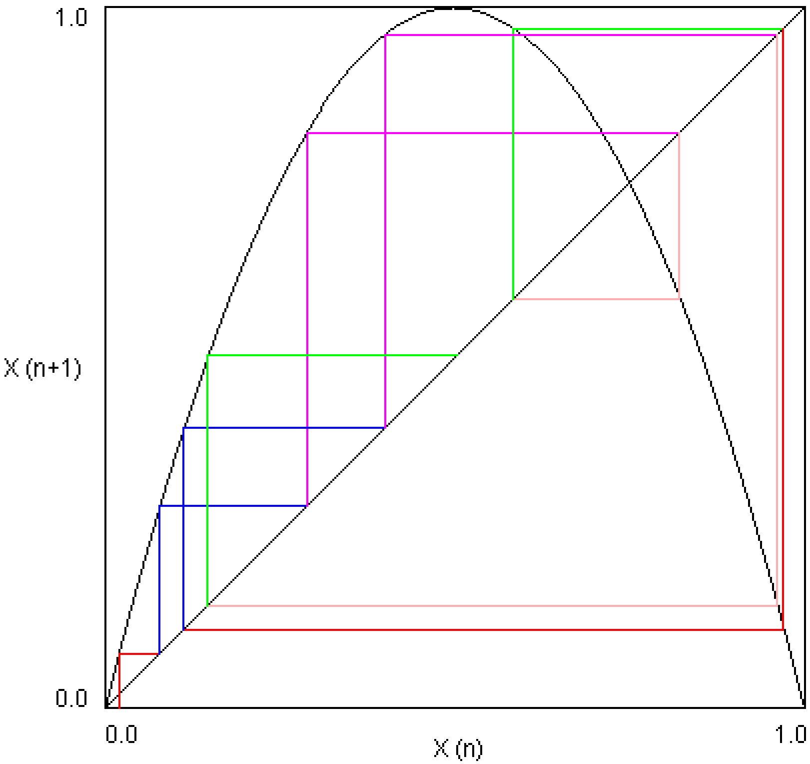
a = 4, x_0 = 0.01001

（参考）リターンマップ

- リターンマップを用いるとロジスティック関数の挙動の違いが分かりやすい



a = 4, x_0 = 0.01



a = 4, x_0 = 0.02

（参考）リャプノフ指数

- リャプノフ指数：初期値が変化したときにその後の挙動がいかに変化するかを示す指数
- カオスであるかどうかを判断する指標のひとつとされる

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left|\frac{d}{dx} f(x_i)\right|$$

- この数値が正であることがカオスである条件のひとつとされている

3重振り子のカオス性

- 最初の角度をほんの少しずつ変えた振り子を100個同時に動かしてみるシミュレーション例

フラクタル

- フラクタルの厳密な定義は非常に難しいが、直感的には「図形の部分と全体が自己相似」になっているものなどが挙げられる
- 例）海岸線の形状、木の枝、血管の形状など

フラクタル研究の歴史

- 始まりは、イギリスの気象学者ルイス・フライ・リチャードソンの国境線に関する検討である。国境を接するスペインとポルトガルは、国境線の長さとしてそれぞれ987kmと1214kmと別の値を主張していた。リチャードソンは、国境線の長さは用いる地図の縮尺によって変化し、縮尺と国境線の長さがそれぞれ対数を取ると直線状に相関することを発見した。この様な特徴をフラクタルと名付けて一般化したのがマンデルブローである。

- マンデルブローによるフラクタルの定義:「ハウスドルフ次元が位相次元を厳密に上回るような集合」

（以上Wikipediaより引用）

フラクタル図形

- 自然界に存在するもののほかに、人工的なフラクタル図形が数多く考案されている
- セルオートマトンの練習問題であらわれたシェルピンスキー・ガスケットも代表的なフラクタル図形である
- 他にもコッホ曲線、C曲線など

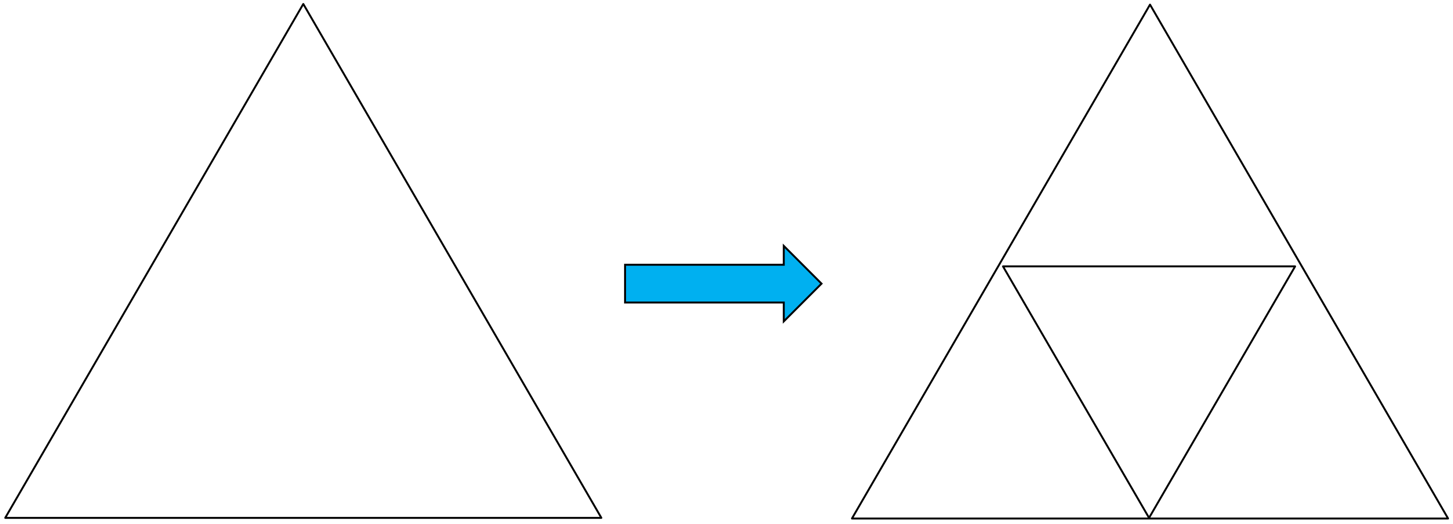
シェルピンスキー・ガスケット

- シェルピンスキー・ガスケットの描画方法

（1）三角形の中点をとり、逆三角形を描く

（2）新たにできた三角形についても同様にして逆三角形を描く

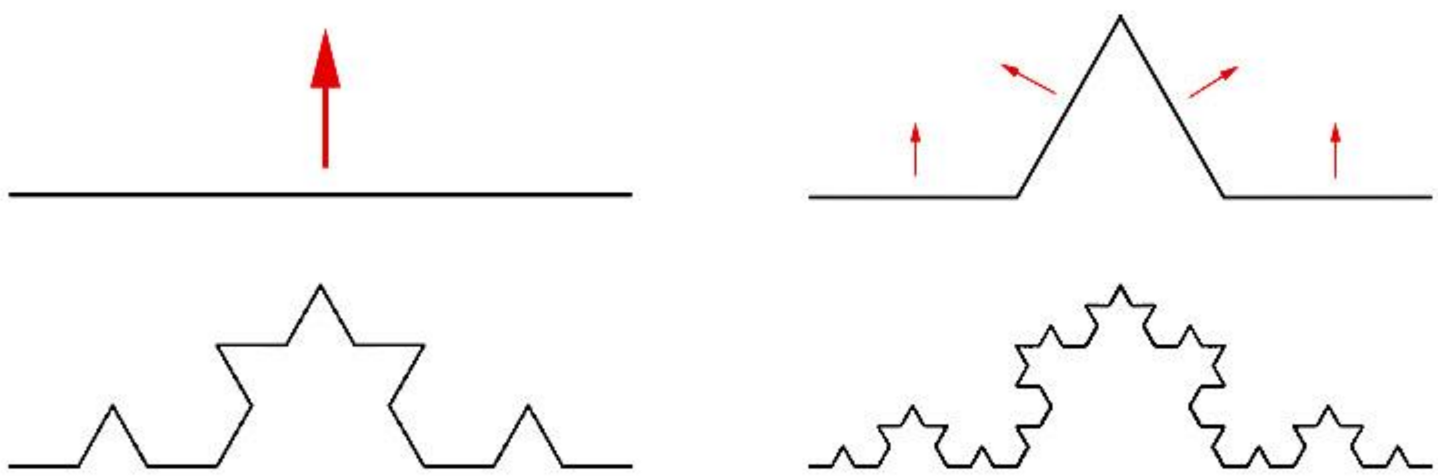
この作業を繰り返す



コッホ曲線

- コッホ曲線：代表的なフラクタル図形
- 直線を3等分して中央に正三角形の2辺を描く

→この操作を繰り返すと、全体と部分が相似になる図形が描かれる



フラクタル図形の描画

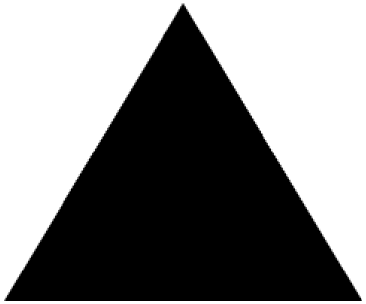
- シェルピンスキー・ガスケットおよびコッホ曲線の派生形であるコッホ切片を描いてみよう

（1）シェルピンスキー・ガスケットを描画せよ
※描画の繰り返し回数は各自で定めてよい

（2）三角形の各辺についてコッホ曲線と同じ操作を適用し、どのような形になるか描画せよ

フラクタルの利用：シダの葉の描画

- 自然界では、シダの葉もフラクタル図形の特徴を満たしている
- ある図形操作の繰り返しでシダに似た形を描画できる
- Excelで特定の数式を使用しても描画できる



（参考）Excelによるシダの葉の描画（1）

- 以下の4組の式を、右側に示す確率で適用してやるとシダの葉に似た図形が描ける

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0 \\ y_{n+1} = 0.16\,y_n \end{cases}$$

・・・1%

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.2x_n - 0.26\,y_n \\ y_{n+1} = 0.23x_n + 0.22\,y_n + 1.6 \end{cases}$$

・・・7%

$$\begin{cases} x_{n+1} = -0.15x_n + 0.28\,y_n \\ y_{n+1} = 0.26x_n + 0.24\,y_n + 0.44 \end{cases}$$

・・・7%

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.85x_n + 0.04\,y_n \\ y_{n+1} = -0.04x_n + 0.85\,y_n + 1.6 \end{cases}$$

・・・ 85%

（参考）Excelによるシダの葉の描画（2）

- 以下のような枠を描き、A3セルに　＝RAND()　と記入する

	A	B	C
1	乱数	xn	yn
2		0	0
3	0.4449269	=IF(A3<0.01,0, IF(A3<0.08,0.2*B2−0.26*C2, IF(A3<0.15,−1*0.15*B2+0.28*C2, 0.85*B2+0.04*C2)))	=IF(A3<0.01,0.16*C2, IF(A3<0.08,0.23*B2+0.22*C2+1.6, IF(A3<0.15,0.26*B2+0.24*C2+0.44, −1*0.04*B2+0.85*C2+1.6)))
4			

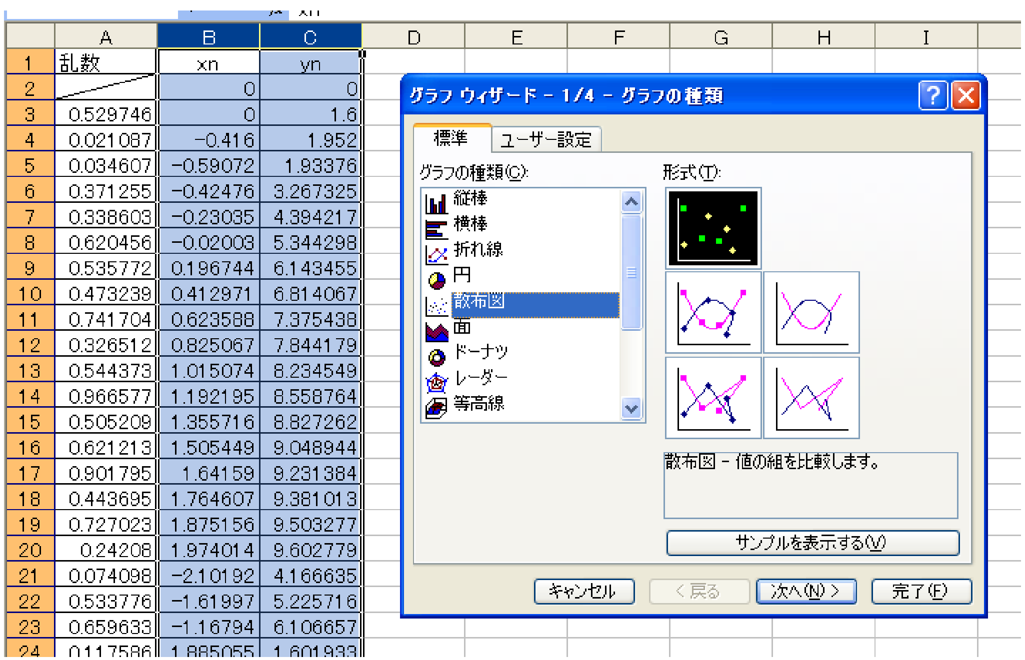
- Xn、Ynの初期値は 0 とする
- 乱数の値によって分類し、先ほどの4組の式を適用する

（B3セル）=IF(A3<0.01,0,IF(A3<0.08,0.2*B2−0.26*C2,
IF(A3<0.15,−1*0.15*B2+0.28*C2,0.85*B2+0.04*C2)))

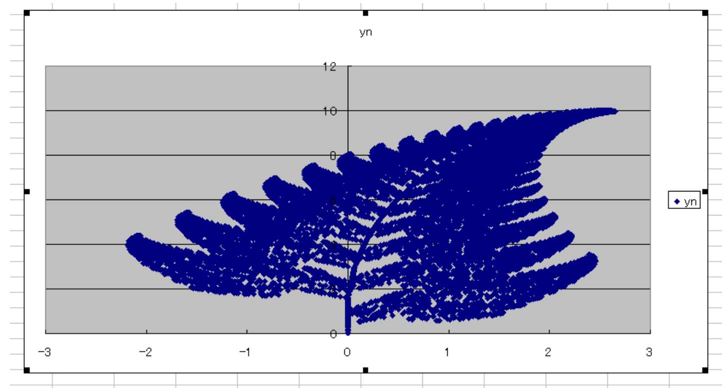
（C3セル）=IF(A3<0.01,0.16*C2,IF(A3<0.08,0.23*B2+0.22*C2+1.6,
IF(A3<0.15,0.26*B2+0.24*C2+0.44,−1*0.04*B2+0.85*C2+1.6)))

（参考）Excelによるシダの葉の描画（2）

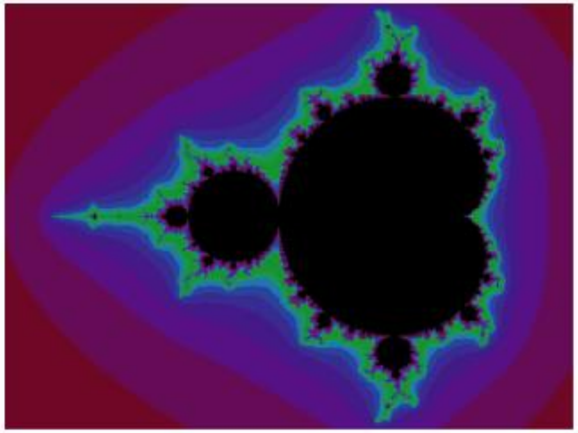
- 記入できたら下へ10000～20000行ほどコピーし、B、C列を選択して「散布図」でグラフを描く



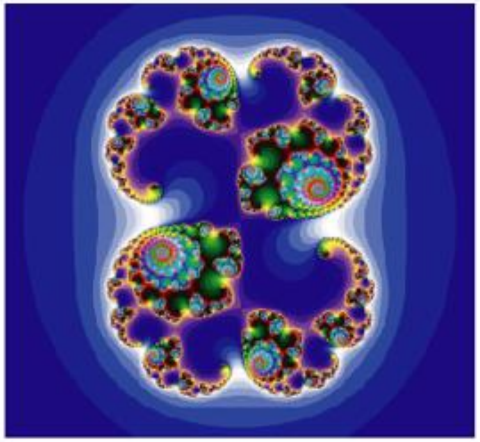
	A	B	C
1	乱数	xn	yn
2		0	0
3	0.529746	0	1.6
4	0.021087	−0.416	1.952
5	0.034607	−0.59072	1.93376
6	0.371255	−0.42476	3.267325
7	0.338603	−0.23035	4.394217
8	0.620456	−0.02003	5.344298
9	0.535772	0.196744	6.143455
10	0.473239	0.412971	6.814067
11	0.741704	0.623588	7.375438
12	0.326512	0.825067	7.844179
13	0.544373	1.015074	8.234549
14	0.966577	1.192195	8.558764
15	0.505209	1.355716	8.827262
16	0.621213	1.505449	9.048944
17	0.901795	1.64159	9.231384
18	0.443695	1.764607	9.381013
19	0.727023	1.875156	9.503277
20	0.24208	1.974014	9.602779
21	0.074098	−2.10192	4.166635
22	0.533776	−1.61997	5.225716
23	0.659633	−1.16794	6.106657
24	0.117586	1.885055	1.601933



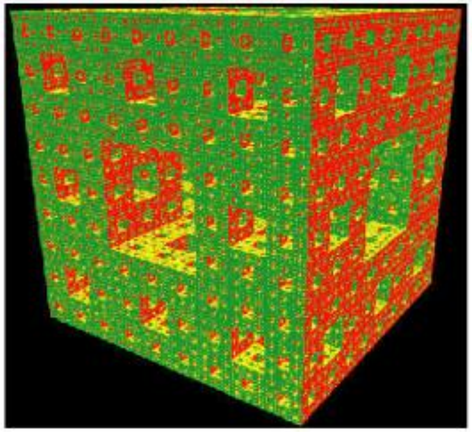
さまざまなフラクタル図形



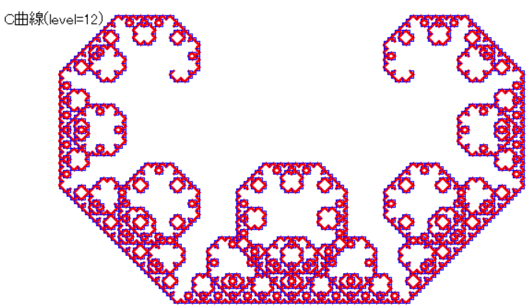
マンデルブロー集合



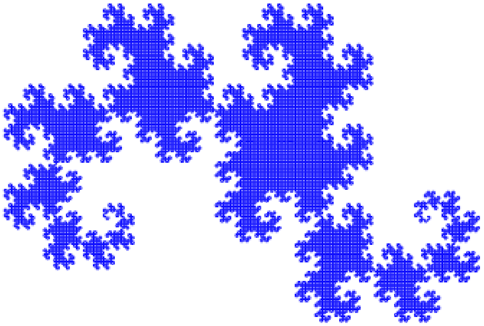
ジュリア集合



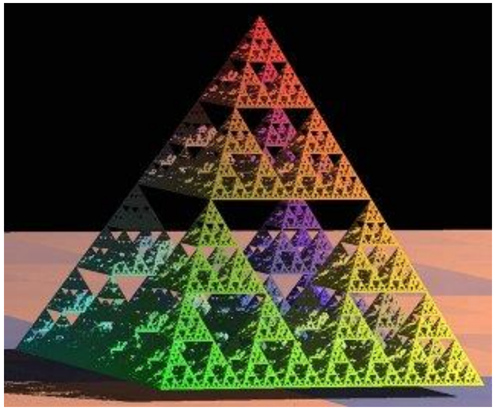
メンガーのスポンジ



C曲線



ドラゴン曲線



シェルピンスキーのピラミッド

フラクタルの応用

- CGや図形の描画
  - 山岳や海岸線の描画
  - CGによる芸術作品

- 破壊の進展や強度の測定
  - 岩石の強度診断

  ・・・岩石に圧力がかかった際のクラック（ひび割れ）の進展をフラクタル次元を用いて計測し、破壊の様子と強度を測定する

  フラクタル次元：フラクタル図形の複雑さを示す指標

  いくつかの計算法が提案されている

  例）相似次元、ディバイダ、ボックスカウント法など

お知らせ

- 次回（第10回）から中間レポートの作成に取りかかります
- 次回は手作業を中心にする予定ですが、早めに進めたい人でノートPCをお持ちの場合は持参してください
- 12月5日（木）3限の授業（第11回）は6202教室で実施します