

【カオス】

- カオスの厳密な定義は研究者によって異なる
- 時間の経過とともに変化する決定論的なシステムにおいて、初期値に敏感に反応する非周期振動
(伊藤俊秀、草薙信照「コンピュータシミュレーション」オーム社 より引用)

- カオスの必要条件
- 非周期である
- 何らかのリターンマップによって記述できる
- リャプノフ指数が正である

【ロジスティック曲線】

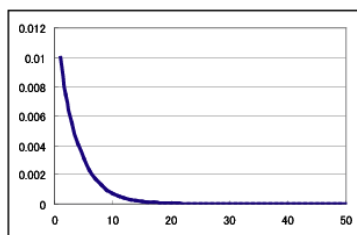
人口増加や製品の普及率などの記述に使用される曲線で、以下のような関数（ロジスティック関数）で表される）

$$\frac{dy}{dx} = (-\alpha x + \beta)x$$

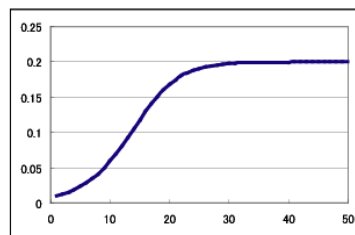
- ロジスティック関数を差分方程式であらわすと以下のようになる

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

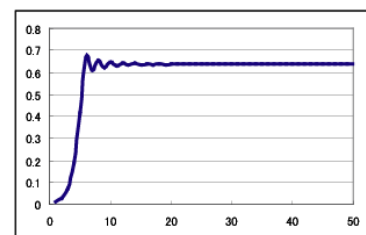
- a の値によって x_n が以下のように変化することがわかっている
- $0 \leq a \leq 1$. . . 0 に収束
- $1 < a \leq 2$. . . $1 - 1/a$ に収束
- $2 \leq a < 3$. . . 振動しながら $1 - 1/a$ に収束
- $3 \leq a < 3.569\dots$. . . 2^k 個の周期点で振動
- $3.569\dots \leq a < 4$. . . カオス性を示し、非周期で振動



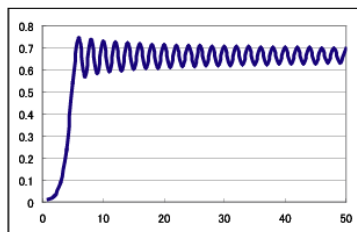
a = 0.75



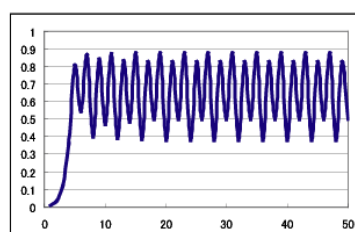
a = 1.25



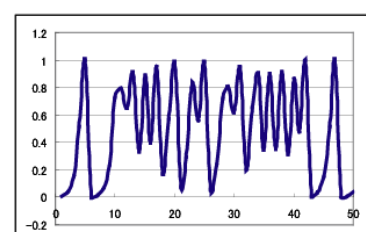
a = 2.75



a = 3



a = 3.5

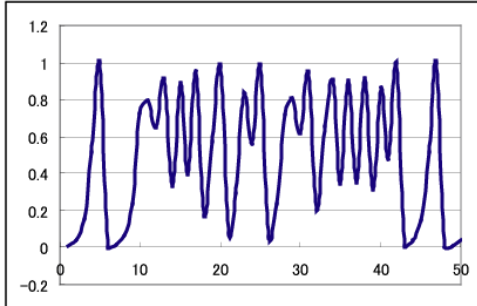


a = 4

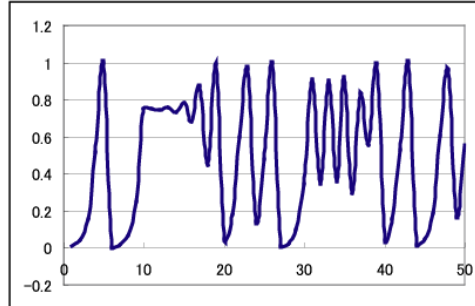
【初期値とカオス】

カオスの特徴の一つとして、「初期値のわずかな変化に敏感に反応する」というものがある

例) カオス性を示すロジスティック曲線において、初期値をわずかに変えるとその後の挙動が大きく異なる



$a = 4, x_0 = 0.01$

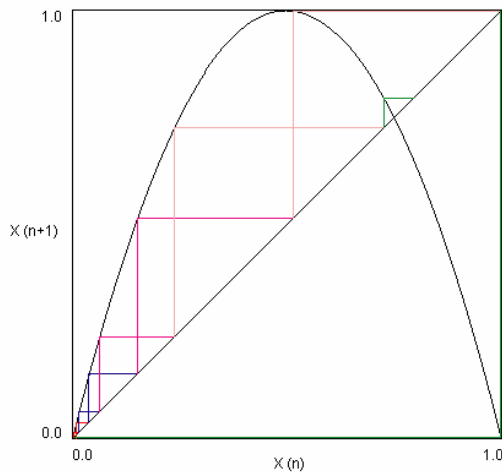


$a = 4, x_0 = 0.01001$

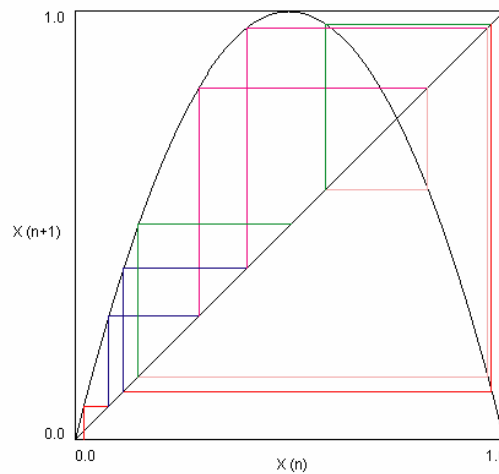
【リターンマップ】

$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ の曲線と直線 $x_{n+1} = x_n$ により描かれる数列の軌跡

リターンマップを用いるとロジスティック曲線の挙動の違いが分かりやすい



$a = 4, x_0 = 0.01$



$a = 4, x_0 = 0.02$

【リャプノフ指数】

- リャプノフ指数：初期値が変化したときにその後の挙動がいかに変化するかを示す指数
- カオスであるかどうかを判断する指標のひとつ

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left| \frac{d}{dx} f(x_i) \right|$$

- この数値が正であることがカオスである条件のひとつとされている

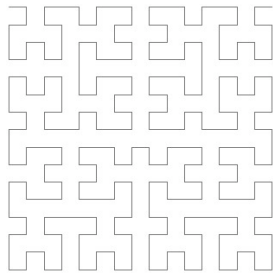
【フラクタル】

- フラクタルの厳密な定義は非常に難しいが、直感的には「図形の部分と全体が自己相似」になっているものなどが挙げられる
- マンデルブローによるフラクタルの定義：「ハウスドルフ次元が位相次元を厳密に上回るような集合」
- 例) 海岸線の形状、木の枝、血管の形状など



【フラクタル図形】

- 自然界に存在するもののほかに、人工的なフラクタル図形が数多く考案されている
- シェルピンスキー・ガスケット、コッホ曲線、ヒルベルト曲線など

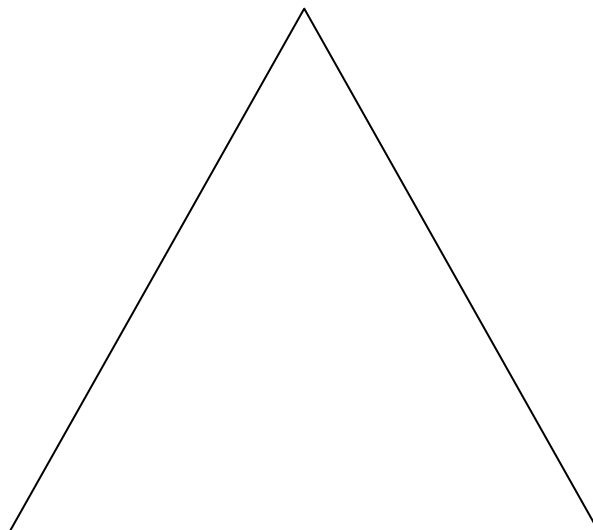


ヒルベルト曲線

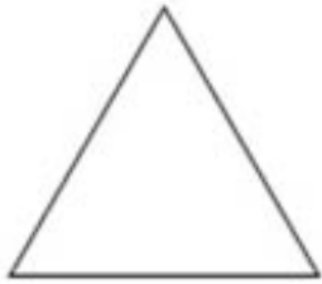


コッホ曲線

(練習) シェルピンスキー・ガスケットを描画せよ (繰り返し回数は各自で決めてよい)



(練習) 三角形の各辺に対してコッホ曲線と同じ操作を実施せよ



お知らせ

- 次回（第10回）から中間レポートの作成に取りかかります
- 次回は手作業を中心にする予定ですが、早めに進めたい人でノートPCをお持ちの場合は持参してください
- 12月5日（木）3限の授業（第11回）は6202教室で実施します

(参考) 【Excel によるロジスティック曲線の描画】

	A	B	C
1	n	Xn	a
2	0	0.01	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		

左図のような枠を作成 (n は 50 まで下に作成する)

B3 セルに以下のように記述し、下へコピー

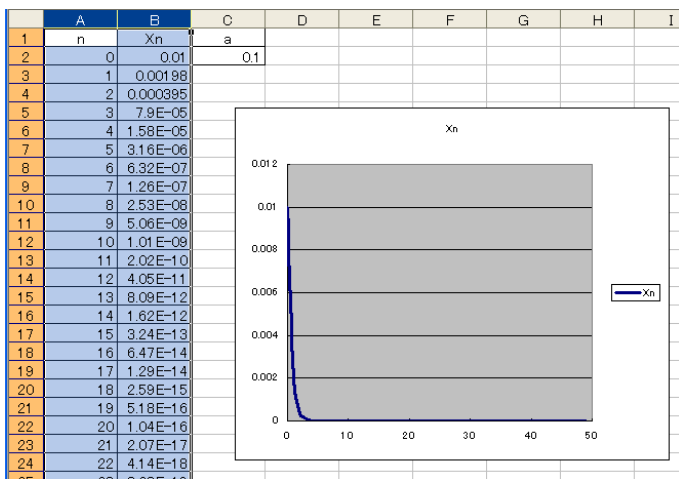
$$(B3 \text{ セル}) \quad =C\$2 * B2 * (1 - B2)$$

C 2 セルに以下のように記述 (循環参照エラーが出たらキャンセルを押す)

$$(C 2 \text{ セル}) \quad =IF(C2+0.1<4,C2+0.1,4)$$

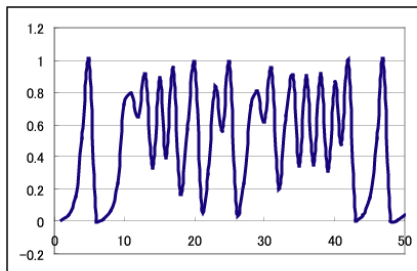
48	46	
49	47	
50	48	
51	49	
52	50	
53		

できたら A 列、B 列を選択し、「散布図」でグラフを描く

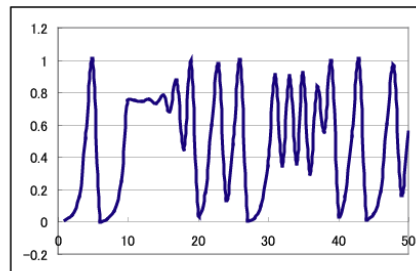


できたら循環参照を許可し、F9 キーを押して a の値を徐々に増やしてみよう
a の値に応じてグラフの形が大きく変化するはず

- カオスの特徴のひとつに「初期値に敏感に反応する」というものがある
- 下の例のように、初期値をわずかに変えるだけで挙動が大きく異なる



$$a = 4, x_0 = 0.01$$



$$a = 4, x_0 = 0.01001$$

【参考】Excelによるシダの葉の描画

以下の4組の式を、それぞれ右側に示す確率で適用するとシダの葉に似た図形が描ける

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0 \\ y_{n+1} = 0.16y_n \end{cases} \quad \dots 1\%$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.2x_n - 0.26y_n \\ y_{n+1} = 0.23x_n + 0.22y_n + 1.6 \end{cases} \quad \dots 7\%$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -0.15x_n + 0.28y_n \\ y_{n+1} = 0.26x_n + 0.24y_n + 0.44 \end{cases} \quad \dots 7\%$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.85x_n + 0.04y_n \\ y_{n+1} = -0.04x_n + 0.85y_n + 1.6 \end{cases} \quad \dots 85\%$$

(1) 以下のような枠を作成し、A3セルに =RAND() と記述し、初期値は0とする。

	A	B	C
1	乱数	xn	yn
2		0	0
3	=RAND()		
4			

(2) B3、C3セルに以下のように記述

(B3セル) =IF(A3<0.01,0,
IF(A3<0.08,0.2*B2-0.26*C2,
IF(A3<0.15,-1*0.15*B2+0.28*C2,
0.85*B2+0.04*C2)))

(C3セル) =IF(A3<0.01,0.16*C2,
IF(A3<0.08,0.23*B2+0.22*C2+1.6,
IF(A3<0.15,0.26*B2+0.24*C2+0.44,
-1*0.04*B2+0.85*C2+1.6)))

(3) 記入できたら下へ10000~20000行ほどコピーし、B、C列を選択して散布図でグラフを描く。
うまく描けたら色や点の形などを調整し、それらしくしてみよう。

